J. Rey Pastor y José Balbini

Historia de la Matemática

vol. 2

del renacimiento a la actualidad



Acceso Abierto

gedisa editorial

HISTORIA
DE LA MATEMÁTICA
VOL. 2

Autores: Rey Pastor / J.Babini
ISBN 10: 8474322251
ISBN 13: 9788474322255
Editorial: Gedisa, 1985







ÍNDICE

LA MATEMÁTICA RENACENTISTA

Los progresos de la aritmética

Si se exceptúan el advenimiento de la perspectiva, que del seno de los artistas se traslada al campo matemático, y algunos atisbos del futuro cálculo infinitesimal, puede decirse que en ese campo la preocupación del siglo XVI fue de índole instrumental, ya en el sentido de completar el conocimiento de la matemática antigua mediante los textos impresos que se difunden, ya en el sentido de perfeccionar los métodos y recursos que desde el siglo XIII se desarrollaban en aritmética, en álgebra y en trigonometría.

Otra característica de la matemática renacentista debe verse en la influencia que ejercieron en su desarrollo factores extrínsecos: así como las exigencias de los artistas dieron nacimiento a la perspectiva, que se convertirá en una nueva rama de la geometría, así las necesidades de los comerciantes, contadores y calculistas provocaron innovaciones aritméticas y las exigencias de los astrónomos condujeron a perfeccionamientos en la trigonometría.

La única rama que se mantuvo dentro de su carácter técnico especulativo, fue el álgebra, aunque en su desarrollo no deja de advertirse cierta nota proveniente del ambiente de la época: el interés por el planteo y la propuesta de cuestiones difíciles y la atracción que aún ejercían las justas y desafíos otorgaron al latente carácter lúdico de la matemática una característica propia. En ninguna otra época de su historia la matemática vio episodios semejantes a los que se desarrollaron entre los matemáticos italianos de la primera mitad del siglo XVI; en ningún otro momento se suscitó un interés público semejante al que despertaron entonces cuestiones tan inocentes como la de averiguar cuál era el número que agregado a su raíz cúbica sume 14, sobre todo cuando la respuesta es una complicada combinación de raíces cuadradas y cúbicas superpuestas.

En el campo aritmético el siglo XVI asiste a la paulatina eliminación del cálculo con el ábaco y su sustitución por las reglas

ordinarias del cálculo con las cifras arábigas. En el siglo XV el ábaco ya habla desaparecido de España e Italia; paulatinamente fue ocurriendo lo mismo en Francia, Alemania e Inglaterra. Una difundida figura de la enciclopedia Margarita Philosophica de Gregor Reisch, aparecida a comienzos del siglo XVI, muestra a la "Dama Aritmética" presidiendo una especie de torneo entre un algorítmico (que opera de la nueva manera) y un abacista: las expresiones de los rostros de ambos rivales revelan a las claras el triunfador.

Como importantes innovaciones aritméticas del siglo deben considerarse los números decimales, los logaritmos y las fracciones continuas.

Tal aparición tardía de los números decimales no deja de ser extraña cuando se piensa que la introducción definitiva del sistema decimal de numeración en Occidente data del siglo XIII y que tal introducción parecería traer aparejada la de los números decimales como parte integrante del sistema. Sin embargo no fue así y en sus comienzos no se advirtió que las ventajas que ofrecía el sistema, al representar los números como suma de múltiplos de potencias de 10 en sentido creciente, también las arrecia en el sentido decreciente de esas potencias. Ya vimos cómo los matemáticos mismos escribían y utilizaban a veces los números, adoptando para la parte entera el sistema posicional decimal, mientras que para la parte menor que la unidad empleaban fracciones ordinarias o sexagesimales.

Aunque pueden señalarse ciertos intentos anteriores en el sentido de adoptar un sistema de fracciones decimales, el primer tratamiento sistemático de aquéllas se debe a una de las figuras científicas del siglo: el belga Simon Stevin, de actividades múltiples, como funcionario y como científico.

Su primera publicación en 1584 consistió en unas tablas para el cálculo de interés compuesto, mientras que en el año siguiente hizo conocer un breve opúsculo sobre los números decimales, en flamenco *La Thiende* y en francés *La Disme*, títulos que aluden al "décimo", aunque en verdad el libro es una aritmética decimal. En el subtítulo se agrega que el tratado "enseña cómo todos los cálculos que se presentan en los negocios pueden realizarse con enteros solamente, sin ayuda de fracciones". *La Disme* comprende

dos partes: en la primera define los números decimales; en la segunda enuncia las reglas para realizar con ellos las operaciones elementales; agrega luego aplicaciones a la astronomía, la agricultura, el comercio, para terminar expresando el deseo de que los gobiernos extiendan la división decimal al sistema de monedas, pesas y medidas, adelantándose un par de siglos a la declaración de la adopción universal del sistema métrico decimal. El simbolismo de Stevin al escribir, después de cada cifra decimal, el exponente de la potencia de 10 del denominador encerrado en un pequeño círculo no fue feliz, pero pocos años después se advirtió que para representar los números decimales bastaba separar de alguna manera la parte entera de la fraccionaria. Dejando de lado otras propuestas en tal sentido, recordemos que el uso de la coma para tal oficio se debe al astrónomo Giovanni A. Magini, mientras que el uso del punto con el mismo fin aparece en la *Constructio* de Napier de 1619.

También la invención de los logaritmos obedeció a un propósito de simplificar los cálculos aritméticos, sobre todo las engorrosas multiplicaciones, divisiones y raíces de números de muchas cifras con las que se encontraban, en especial, los astrónomos.

El concepto, aunque no el nombre, de logaritmo, ya como operación inversa de la potenciación, ya como correspondencia entre los términos de una progresión aritmética y otra geométrica, aparece en la Arithmetica integra de Michael Stifel aparecida en 1544 que, según el título, debía comprender todo lo que en esa época se entendía como aritmética: teoría de números, proporciones y álgebra. Es en ese libro donde aparece por primera vez la relación recurrente entre los términos del "triángulo aritmético", que Stifel extiende hasta el orden 17.

Es también en esa obra donde Stifel, al ocuparse de la teoría de las proporciones, dice que 729/64 puede dividirse 6 veces por 3/2 o que 2187/128 puede "dividirse" 2 veces, con un resto de l/3, por 27/8, expresiones que en lenguaje moderno se traducirían diciendo que 6 es el logaritmo de base 3/2 del número 729/64 o que 7/3 es el logaritmo de base 2718 del número 2187/128. Además, en la comparación entre los términos de una progresión aritmética de razón 1, que llama “número” con los de una progresión geométrica de razón 2, que llama “exponentes”,

(comparación que tiene un lejano precursor en Arquímedes y uno más próximo en Chuquet), se extiende en ambas direcciones y, señala, en especial, la correspondencia que existe entre las operaciones que se realizan con los términos de ambas series. Así, dice, a la suma, resta, multiplicación y división por un número de los elementos de la progresión aritmética, corresponden, respectivamente, la multiplicación, división, potenciación y extracción de raíces de los elementos de la serie geométrica.

Es posible que estas ideas influyeran en los matemáticos que trataban de simplificar las operaciones aritméticas, entre cuyos procedimientos figuraba la prostaféresis, neologismo para denominar la transformación de una multiplicación en suma, usada principalmente por los astrónomos utilizando relaciones entre las funciones circulares.(I)

Pero serán los logaritmos los que resolverán totalmente la cuestión y fueron precisamente aquellas exigencias prácticas las que hicieron que los logaritmos, operación inversa de la exponenciación, aparecieran antes de haberse constituido la operación directa.

Que la exigencia práctica de los calculistas del siglo XVI estaba en el aire lo prueba el hecho de que los logaritmos nacen por obra de dos autores distintos y en forma independiente: el escocés Napier y el suizo Bürgi, que publican sus tablas a comienzos del siglo XVII con pocos años de diferencia: el *Mirifici logarithmorum canonis* descriptio de Napier es de 1614; las *Progress-tabulen* de Bürgi son de 1620.

La tabla de logaritmos que hace conocer John Napier con su libro de 1614 no es de logaritmos de números sino de logaritmos de senos, en la cual, para obviar los números negativos, utilizó como razón de la progresión geométrica un número próximo a la unidad, pero menor que ella. Además, y esto es un gran progreso teórico, introdujo los logaritmos mediante una concepción cinemática. (2) con lo que implícitamente admitió la propiedad de la función logarítmica de ser una función continua, circunstancia que no se advierte cuando los logaritmos se conciben como términos de una sucesión discreta, como lo es la progresión aritmética. Por supuesto que, para la construcción efectiva de sus logaritmos, Napier tuvo que acudir a ambas progresiones.

Se debe a Napier el nombre de "logaritmo" (de logos y arithmo), como número de razones, pues en el caso de ser el logaritmo un número entero, es el número de factores que se toman de la razón dada (base) para obtener el antilogaritmo. Napier dio su tabla en 1614 sin la explicación de su construcción, que aparece póstuma en 1619 como *Mirifici logarithmorum canonis constructio*.

La preocupación de Napier por facilitar los cálculos numéricos se manifestó también mediante la invención de unos dispositivos elementales, llamados "bastoncillos de Napier", aunque si se prescinde de su máxima invención los logaritmos, se le deben también contribuciones a la trigonometría esférica donde con su nombre se conoce una "regla" mnemotécnica para recordar las relaciones entre los elementos de los triángulos esféricos rectángulos y unas "analogías" (proporciones) para los triángulos esféricos oblicuángulos. De esas analogías Napier dio dos; las otras dos las dio Henry Briggs, un profesor londinense a quien se debe en buena parte la difusión y el perfeccionamiento de los logaritmos inventados por Napier.

En efecto, los actuales logaritmos decimales surgieron de una entrevista (3) entre Napier y Briggs. Al insinuar Briggs la conveniencia de adaptar los logaritmos al sistema de numeración y tomar para ello la base 1/10 Napier replicó diciendo que ya había pensado en esa conveniencia pero que aconsejaba tomar la base 10. Briggs se dedicó a la tarea de construir la tabla de acuerdo con el nuevo sistema y en 1624 aparecieron las tablas de los llamados también "Logaritmos de Briggs", con catorce cifras, de los números de 1 a $2 \cdot 10^{14}$ y de $9 \cdot 10^{4}$ a 10^{5}, donde ya aparece la palabra "característica" (la palabra "mantisa" fue utilizada por primera vez por Wallis en 1693). (4)

Jobst Bürgi fue un científico versado en cuestiones de matemática, astronomía y mecánica y, sobre todo, hábil calculista, En su *Arithmetische und Ceometrische Progress-tabulen* da, además de la tabla de logaritmos, una tabla de senos para cuya construcción utiliza la expresión de los senos de los múltiplos de los arcos en función de los senos de los arcos, para el cálculo de algunos de los cuales resuelve ecuaciones en forma aproximada.

En cuanto a sus "logaritmos" Bürgi utiliza las dos progresiones tomando como razón de la progresión geométrica un número

próximo a la unidad, algo mayor que ésta. Puede comprobarse que, tomando las cifras significativas de sus "logaritmos" y de sus “antilogaritmos”, coinciden sensiblemente con nuestros logaritmos naturales y sus antilogaritmos. (5)

En lo que se refiere al algoritmo de las fracciones continuas, que estaba implícito en el método de las divisiones sucesivas de Euclides para la obtención del máximo común divisor, el siglo XVI aporta la novedad de extender el algoritmo a números irracionales (raíces cuadradas) naciendo así uno de los primeros algoritmos infinitos. Aunque ya aparece en el *Álgebra* de Bombelli, que pronto citaremos, un estudio sistemático se debe a Pietro A. Cataldi, autor de numerosos escritos matemáticos, dos de los cuales son los más importantes: el que se refiere a los números perfectos, donde rectifica los errores que acerca de esos números corrían en su época, y el que dedica a “una manera muy breve de encontrar la raíz cuadrada de los número”. Esa manera no es otra que el desarrollo de la raíz en una fracción continua infinita,(6) de la cual da la ley de formación de las hoy llamadas "reducidas" sucesivas, el signo alternado de la diferencia entre dos reducidas consecutivas y el valor de la raíz, así como su aproximación indefinida a este valor. En cambio, Cataldi no parece haber advertido la propiedad de ser las reducidas de una fracción continua los valores racionales aproximados más simples de un número racional o irracional dado. Esta observación se encuentra en una obra de 1618 de uno de sus contemporáneos, Daniel Schwenter, quien precisamente se propuso encontrar esas expresiones.

Notas complementarias

(1) La prostaféresis. Es claro que la prostaféresis más antigua, sin este nombre ni tal finalidad, es la clásica identidad, de reminiscencias babilónicas y diofánticas, que expresa el producto mediante la diferencia de dos cuadrados y que en tiempos recientes (siglo pasado y aun comienzos del presente) se utilizó en las "tablas de cuartos de cuadrado" en la forma $xy = E(\frac{1}{4} (x+y)^2) - E(\frac{1}{4} (x-$

y)^2), con la introducción de la función E (parte entera de un número), que ahorra la escritura en la tabla de la parte fraccionaria. Con esa tabla el producto se obtiene mediante una suma, dos diferencias y dos lecturas en la tabla.

Como prostaféresis renacentista citemos el ejemplo que ofrece el astrónomo Tycho Brahe, quien para calcular el valor de *a* en la fórmula de trigonometría esférica:
cos a = cos b · cos c + sen b · sen c · cos A utiliza un ángulo auxiliar *h* tal que *cos h = ½ (cos (b-c) – cos (b+c))*, mediante el cual puede obtener el valor de *cos a* en la forma:
cos a = ½ [cos (b+c) + cos (b-c)] + ½ [cos (A+h) + cos (A-h)], mediante sumas y diferencias.

Pero es claro que la función logarítmica, mediante la simple identidad $xy = e^{lx+ly}$, ofrece la solución más adecuada, aunque el nacimiento de los logaritmos en una época en que no se conocía aún la función exponencial, no fue fruto de especulaciones teóricas sino de intuiciones y exigencias prácticas.

(2) Los logaritmos de Napier. En su concepción cinemática Napier supone dos móviles M y M' que se mueven, respectivamente, sobre un segmento $AB = a$ y una semirrecta de origen A'; ambos parten simultáneamente de A y A' con igual velocidad inicial *v*, pero mientras que el movimiento de M' es uniforme, el de M es tal que su velocidad estable y proporcional a MB; en estas condiciones Napier dice que *A'M'* es el logaritmo de *MB*.

Si traducimos ese movimiento con las notaciones actuales tendremos: llamando *x = MB*, *y = A'M'* y la velocidad inicial, *a dx = -vx dt = -x dy*. Integrada esa ecuación, teniendo en cuenta la condición inicial, da $y = -al \cdot \frac{x}{a} = al_1 \cdot \frac{x}{a}$, indicando con l_1 el símbolo de los logaritmos de base *1:e*. Considerando que *y.a = a sen x* tendríamos finalmente que los logaritmos de Napier, con su concepción cinemática serian proporcionales a los logaritmos naturales de los senos, con signo contrario, o los logaritmos de base 1*:e* de los senos de los ángulos.

Claro que no son éstos los logaritmos de la tabla de Napier, pues no disponiendo éste de los recursos del cálculo infinitesimal, no pudo mantener su concepción cinemática de los logaritmos como

función continua. Para construir su tabla tuvo que acudir a la correspondencia entre las dos progresiones y transformar su movimiento en una sucesión discontinua de etapas, demostrando que los correspondientes valores de x respondían a los términos de una progresión geométrica decreciente de razón menor que la unidad aunque muy próxima a ésta, pues toma esa razón igual a $(1 - a^{-1})$, con $a = 10^7$.

Mediante tablas auxiliares construye con esa razón una progresión geométrica de 3.600 términos que va desde 10^7 = a sen 90° hasta ½ $\cdot 10^7$ = a sen 30°, que hace corresponder a los logaritmos de los senos de los ángulos entre 90° y 30° de minuto en minuto. Para valores anteriores de 30° utiliza los valores calculados para sen 2α y sen (90° - α) para obtener el logaritmo del sen α mediante la expresión 2 sen α · cos (90° - α) = sen 2α, con lo que puede ofrecer la tabla de sus logaritmos de las tres funciones circulares, seno, coseno y tangente, que publica en 1614.

(3) La entrevista Napier-Briggs. Aunque es de carácter anecdótica, no deja de tener interés la primera entrevista entre John Napier, barón de Merchiston, y el profesor de Oxford Henry Briggs, que se propuso ir a Escocia con el objeto de visitar al inventor de los logaritmos. He aquí el detalle de esa entrevista, relatada por un contemporáneo, aunque la traducción pierda todo el sabor del inglés antiguo, Cuenta ese autor que Briggs "se puso al efecto en contacto ron John Marr, que iría a Escocia antes que Mr. Briggs, ya que sería ahí donde estas dos tan cultas personas debían encontrarse. Mr. Briggs señaló el día preciso en que se encontraría en Escocia, Edimburgo, pero falló en su propósito de modo que Lord Napier dudaba de que llegara. Ocurrió cierto día que John Marr y Lord Napier hablaban de Mr. Briggs. -¡Ah! ¡Ah, John! – Dijo Merchiston- Mr. Briggs ya no ha de venir. En ese mismo instante alguien golpeó en la entrada. John Marr acudió presuroso y con gran alegría comprobó que se trataba de Mr. Briggs. Condujo entonces a Mr. Briggs a la cámara de mi Señor y durante casi un cuarto de hora ambos se contemplaron con admiración sin decir palabra; al final Mr. Briggs comenzó: Mi Señor, he emprendido este largo viaje con el propósito de ver a usted y conocer mediante qué

rasgos de saber y de ingenio ha llegado usted a pensar en esa excelente ayuda para los astrónomos, es decir los logaritmos".

(4) Los logaritmos después de Briggs. Briggs había, calculado la tabla de los logaritmos de las funciones circulares utilizando la división centesimal del grado, pero sus tablas fueron publicadas póstumas en 1633 por Henry Gellibrand, cuando ya habían aparecido las tablas de logaritmos de esas funciones, de acuerdo con el sistema sexagesimal, de Edmund Gunter en 1620, de manera que la división centesimal no prevaleció. En la obra de Gunter aparecen por primera vez los términos coseno y cotangente. Contribuyó a la difusión de los logaritmos el matemático, editor y librero Adrian Vlacq, que en 1628 dio la tabla de los logaritmos de los números de 1 a 10^5, llenando el hueco entre 10^4 y $9 \cdot 10^4$ que había dejado Briggs.

En cuanto a los logaritmos de Napier, la versión inglesa de la *Descriptio* de 1614 apareció en 1618 por obra de Edward Wright, mientras que los que podríamos llamar los actuales logaritmos naturales aparecieron en una tabla de 1622, debida a John Speidell, que no hizo sino tomar los complementos de los logaritmos de Napier. En la versión, de Wright apareció un "Apéndice", que se atribuyó a otro matemático inglés, William Oughtred, inventor de la regla de cálculo rectilínea. La paternidad de la regla de cálculo circular, también inventada por Oughtred, le fue disputada por otro inventor, probablemente en forma independiente.

(5) Los "logaritmos" de Bürgi. Bürgi parte de una progresión aritmética de primer término 0 y razón 10 y último término 32.000. Estos números, que serían nuestros logaritmos, los denomina números rojos (por el color con que aparecen impresos en su tabla). La progresión geométrica correspondiente empieza con el número 10^8 y la razón es $1 + 10^{-4}$. Éstos son sus números negros. La tabla es de doble entrada, entrando con los números rojos, de manera que Bürgi construyó una tabla de antilogaritmos. Teniendo en cuenta las cifras significativas de los números rojos y negros, es fácil comprobar que los logaritmos de Bürgi tienen por base $(1 + 10^{-4})^{10^4}$, bastante próxima al número e, pues es 2,7184…

Para obviar los logaritmos negativos que podrían presentarse en el caso de la división de un número por otro mayor, utiliza números rojos constantes, los "números rojos enteros", que no son sino logaritmos de potencias de 10, que suma al logaritmo del dividendo para que la diferencia de logaritmos sea siempre positiva y que, en definitiva, mantienen las cifras significativas del cociente.

(6) Las fracciones continuas de Cataldi. Cataldi opera con fracciones continuas de numerador cualquiera. Aunque opera con ejemplos numéricos, el desarrollo de una raíz cuadrada en fracción continua es general y semejante al actual. Si hay que calcular $\sqrt{N}$ y a es el mayor número cuyo cuadrado es menor que N, siendo $b = N - a^2$, podrá expresarse

$$\sqrt{N} - a = \frac{N - a^2}{\sqrt{N} + a} = \frac{b}{2a + \sqrt{N} - a}$$

y al reiterar el valor de $\sqrt{N} - a$ se obtiene la fracción continua que, por razones tipográficas, Cataldi escribe

$$\sqrt{N} = a \& \frac{b}{2a.} \& \frac{b}{2a.} \& \frac{b}{2a.} \ldots$$

donde con el punto que sigue al denominador quiere indicar que es ahí donde debe agregarse el numerador de la fracción siguiente.

Por ejemplo, encuentra que

$$\sqrt{18} = 4 \& \frac{2}{8.} \& \frac{2}{8.} \ldots$$

Señalando que la primera aproximación es 4 ¼ con un error por exceso de $^1/_{16}$; la segunda es 4 $^8/_{33}$ por defecto con error de $^1/_{1689}$, y así sucesivamente. En sus ejemplos calcula numerosas reducidas sucesivas de manera que llega a fracciones con términos de más de 20 cifras, realmente de manejo incómodo.

Los progresos del álgebra

Aun dentro de su carácter instrumental, los progresos del álgebra resultaron más importantes, pues incluyen la resolución, de las ecuaciones cúbica y cuártica e innovaciones en el simbolismo.

El estudio y resolución de las ecuaciones de tercero y de cuarto grados se llevan a cabo en la primera mitad del siglo XVI en el seno de algebristas italianos, en circunstancias personales difíciles de precisar dada la costumbre de la época de mantener el secreto de los descubrimientos científicos con el objeto de resaltar y prevalecer sobre los adversarios en los torneos y justas, a veces públicos, donde se planteaban problemas científicos.

Se atribuye a Scipione del Ferro, profesor en Bologna, el haber sido el primero en resolver la ecuación cúbica de la forma $x^3 + px = q$, es decir "cubo más cosa igual número", en 1506 según Tartaglia, en 1515 según Cardano. Pero ni se conoce la solución de Del Ferro ni se ha logrado encontrar, no obstante las búsquedas, una libreta de apuntes en la que se habría consignado la solución. De existir esa solución se habría dado el caso, no frecuente, de haberse malogrado voluntariamente una celebridad y una prioridad indiscutibles.

El hecho es que a principios de siglo comienzan a aparecer, en el ambiente de los calculistas y algebristas italianos, problemas que conducen a ecuaciones de tercer grado, entre cuyos proponentes figura el discípulo de Del Ferro, Antonio María Fior, o Florido, como lo latiniza Cardano.

Es ahora que aparece uno de los protagonistas de estos sucesos: el ingeniero y matemático autodidacta Niccolo Tartaglia quien, estimulado sin duda por aquellos problemas, encuentra por su cuenta, según propias declaraciones, la regla para resolver ecuaciones cúbicas en 1534. Cuando el año siguiente se produce un importante desafío matemático entre Fior y Tartaglia, éste resuelve las 30 cuestiones que le propuso Fior (en dos horas, según afirma Tartaglia) mientras Fior no resuelve ninguna de las cuestiones que, en igual número e índole, le propone Tartaglia. (1)

La fama que entonces conquista Tartaglia llega a oídos de otro protagonista de esta cuestión, el médico y matemático Gerolamo Cardano, entonces profesor en Milán, (2) con quien se vincula, además, un tercer nombre del equipo, Ludovico Ferrari, probablemente el matemático más brillante del grupo, que aporta la solución de la ecuación cuártica mediante un método que hoy lleva su nombre. (3)

Enterado de los hallazgos de Tartaglia, Cardano se esfuerza en conocerlos para incluirlos en su *Ars magna* en preparación, pero Tartaglia, deseoso de hacerlos aparecer en sus propios libros, se resiste hasta 1539, cuando Cardano logra una entrevista con Tartaglia y éste cede, y revela a Cardano las soluciones de las cúbicas mediante unos tercetos, (4) no sin hacerle jurar "por los Santos Evangelios" que no las hará conocer antes de que Tartaglia las publique por su cuenta.

Pero en 1545 Cardano, probablemente ante la demora de Tartaglia en publicar esas soluciones, rompe el juramento y las hace conocer en su *Ars magna*, exponiendo al respecto su propio punto de vista acerca de la cuestión, hecho que da lugar a que Tartaglia, en sus *Quesiti* del año siguiente, publique ciertas apreciaciones sobre Cardano que provocan una polémica entre Tartaglia y Ferrari, que se prolonga desde principios de 1547 hasta 1548, nada edificante y que tampoco agrega nada a la cuestión de la solución de las ecuaciones de tercero y cuarto grados. (5)

Sin embargo, quedaba aún una laguna, el llamado "caso irreducible" que se presentaba cuando, al aplicar las reglas de Tartaglia, aparecían por parejas raíces cuadradas de radicandos negativos sin interpretación real, no obstante lo cual era fácil comprobar que existían valores reales que satisfacían la ecuación. Esta dificultad la salvará, para casos particulares, otro matemático italiano del siglo; Rafael Bombelli, con su *Álgebra* de 1572. (6)

Además de la resolución de las ecuaciones cúbica y cuártica, sin duda el principal acontecimiento algebraico de la primera mitad del siglo XVI, este siglo vio otras innovaciones algebraicas, en especial referentes al simbolismo.

Durante ese siglo se publicaron aritméticas y álgebras en distintos países de Europa, inspiradas en gran parte en la *Summa* de Pacioli. Así, en Alemania el álgebra tomó el nombre de *Die Coss*,

es decir "la cosa", nombre con que en Italia se designaba a la incógnita; las abreviaturas para indicar sus potencias fueron denominadas "signos cósicos".

La primer álgebra publicada en alemán vulgar, en 1525, es de Christoff Rudolff. Allí aparece, por primera vez, el símbolo $\sqrt{\ }$; corrupción de la inicial de la palabra radix, para indicar la raíz cuadrada (duplica el signo para la raíz cuarta y lo triplica para la cúbica). El signo = aparece por primera vez en *The Whetstone of Witte* (El aguzador del ingenio) publicada en 1557 por Robert Recorde, que es el primer tratado inglés de álgebra, donde el autor afirma que ha elegido ese símbolo porque dos cosas no pueden ser más iguales que dos rectas paralelas. Este símbolo se generalizó hacia fines del siglo XVII; todavía en ese siglo Descartes utiliza un signo semejante al símbolo del infinito, probable corrupción de la inicial de la palabra ae qualis (igual, en latín).

Entre los matemáticos de la península ibérica citemos a Juan de Ortega, que en las ediciones de 1534, 1537 y 1542 de su *Tractado subtilisimo de Aritmética y Geometría* da, sin indicación de método, interesantes aproximaciones de raíces cuadradas, y Pedro Nunes (Nonius en latín, Núñez en español), astrónomo, cosmógrafo y matemático, autor de importantes contribuciones a las tres disciplinas.

Núñez resuelve con ingenio el problema del crepúsculo mínimo y en *De crepusculis*, donde los estudia, describe un dispositivo para aumentar la precisión de los instrumentos de medida. Ese dispositivo experimentó posteriormente varias modificaciones, hasta mantenerse la que introdujo Pierré Vernier en 1631, que dio lugar al hoy llamado "nonius" o "vernier".

Como cosmógrafo Núñez resolvió el problema de determinar la curva que corta a todos los meridianos terrestres bajo ángulo constante, que llamó "línea de rumbo" (nuestra loxodromia). Entre sus obras matemáticas citemos *De erratis Orontii Finei* de 1546 y su *Álgebra* de 1564. La primera de estas obras alude al matemático y astrónomo francés Oronce Finé, que había creído hallar una solución de los tres antiguos problemas de la geometría griega, pretendidas soluciones que Núñez refuta. En cuanto al *Álgebra*, escrita en portugués en 1532, no la publicó en español hasta 1564,

aprovechando entonces todos los progresos realizados en ese lapso, aunque no la resolución de la ecuación cúbica, pues no le satisfacía "aquella manera de notificar el valor de la cosa". Con todo, es el primer y más completo tratado de álgebra en español aparecido en el siglo.

El matemático más importante de la segunda mitad del siglo XVI es FranÇois Viète, más comúnmente conocido por su apellido latinizado Vieta, que se ocupó de todas las ramas de la matemática. Respecto del álgebra fue su mérito ordenar y adecuar todo el material existente, otorgándole unidad y sentido lógico, no obstante el lenguaje oscuro y difícil que utiliza y agrava al introducir un número excesivo de helenismos y neologismos.

Así, en una de sus primeras obras, *In artem analyticen isagoge* (Introducción al arte del análisis, donde "análisis" quiere decir "álgebra", palabra que Viète no emplea por ser de origen árabe) de 1591, expone los principios fundamentales del álgebra, no sólo considerando el método analítico en el sentido antiguo y sus etapas, sino estableciendo también una serie de postulados en que se han de fundar las transformaciones algebraicas. Agrega que la debilidad de los antiguos analistas fue la de ejercitar sus facultades sobre los números, es decir hacer lo que Viète llama "logística numerosa" dando a la palabra "logística' también la acepción griega. Lo que debe hacerse, agrega, es una nueva logística, una "logística speciosa" comparando entre sí las magnitudes. En esta "logística speciosa" reside uno de sus mayores méritos, pues trajo consigo la importante innovación de utilizar en las cuestiones algebraicas cantidades cualesquiera y, por lo tanto, la de introducir el uso sistemático de las letras. (7)

También el ya mencionado Stevin se ocupó de álgebra. Se le debe la idea del método de aproximación de las raíces mediante sustituciones sucesivas, señalando que si la diferencia entre los valores numéricos de ambos miembros de la ecuación cambia de signo para dos valores numéricos de la incógnita, la raíz está comprendida entre estos dos valores. Así, en la ecuación $x^3 = 300x + 33915024$, da a x los valores 10, 100, 1000, y comprueba que x está entre 100 y 1000; al darle luego los valores 100, 200, 300, 400, comprueba que está entre 300 y 400 y así sucesivamente.

Con Stevin se vincula Albert Girard, que tradujo al francés varias obras del primero, autor de contribuciones originales al álgebra, en especial a la teoría de ecuaciones. Escribe éstas en forma completa, separando en cada miembro los términos de igual paridad de las potencias de la incógnita y admitiendo coeficientes nulos cuando la ecuación carece de este término. Afirma, sin demostrarlo, el enunciado del teorema fundamental del álgebra: toda ecuación tiene tantas raíces como indica el grado, para lo cual considera, además de las raíces positivas, las negativas y las complejas (que llama "enveloppés") simples y dobles. Observa que las raíces "imposibles" (negativas e imaginarias) sirven para asegurar la validez de la regla general y comprobar que no hay otras soluciones y, asimismo, que prestan utilidad para inventar las ecuaciones que las contienen. Por lo demás, agrega ejemplos en los cuales las soluciones negativas tienen interpretación concreta, como en el problema, por otra parte clásico: dado un cuadrado de vértices opuestos A y B, determinar por A rectas cuya inserción entre los lados (o sus prolongaciones) del cuadrado que concurren en B sea un segmento dado, mayor que el doble de la diagonal del cuadrado.

Entre otras propiedades que figuran en Girard, mencionemos la resolución completa de la ecuación cúbica en el caso irreducible, mediante la trisección del ángulo, (8) las relaciones entre los coeficientes de una ecuación de cualquier grado y las raíces, o la suma de potencias de igual exponente de esas raíces.

Tales relaciones, así como la descomposición factorial, aunque limitada al caso de raíces reales positivas, aparecen también en el inglés Thomas Harriot, a quien se debe la importante innovación, en el simbolismo, de indicar las potencias mediante los factores repetidos, y la menos importante de sustituir las mayúsculas de Viète (para las incógnitas) por minúsculas. Por ejemplo una ecuación de incógnita a y de factores $a - b$, $a + c$, $a + d$, tiene la "forma canónica" (la expresión es suya): $aaa - baa + caa + daa - bca - bda + cda - bcd$.

A Harriot se debe la introducción de los símbolos actuales para mayor y menor. En alguna ocasión utilizó el punto como símbolo de multiplicación, aunque como tal el punto no se difundió hasta el siglo XVIII por obra de Leibniz. El signo × para la multiplicación

parece ser original de Oughtred, quien dio entre propios y ajenos unos 150 signos matemáticos. De ellos se han conservado el de la multiplicación, los signos : y :: para la razón y proporción, aunque ya en desuso, y algunas abreviaturas como log. para logaritmo. Como signo precursor agreguemos el símbolo π/d para la razón de la circunferencia al diámetro.

Notas complementarias

(1) Tartaglia y su obra. De origen muy humilde, Tartaglia sufrió en su niñez heridas que le dificultaban el habla, de ahí el apodo de "Tartaglia", por tartamudo, que le quedó como apellido. De inteligencia viva, se convirtió en un experto en cuestiones técnicas y matemáticas, que adquirió fama como profesor particular, y no le faltaron editores para sus obras. Su primera obra impresa es *Nova scientia inventa* de 1537, que se refiere a la balística. Le sigue en 1546 los *Quesiti et inventioni diverse* que, en forma dialogada y con numerosas notas autobiográficas y de carácter general, considera distintas cuestiones que le habían sido planteadas. En su mayor parte se trata de cuestiones de ingeniería y de arte militar, aunque abundan también las de matemática. Histórica y técnicamente importantes son sus referencias a la resolución de la ecuación cúbica, que nos enteran que es en 1530 cuando le proponen las primeras cuestiones que conducen a ecuaciones cúbicas y que, en vista de la afirmación de Pacioli, Tartaglia reprocha al proponente haberle sometido cuestiones que él (el proponente) no sabía resolver, aunque Tartaglia agrega que él (Tartaglia) no creía en la afirmación de Pacioli. También nos enteramos que una de las cuestiones que le proponen en 1535 conduce a una ecuación de cuarto grado, precisamente aquella que más adelante resolverá Ferrari. Por último, figuran en los *Quesiti* las incidencias de la disputa con Fior, algunas de las cuestiones propuestas en ella, la entrevista entre Cardano y Tartaglia, en la que éste le hace entrega de los tercetos con la solución de la cúbica. Desde el punto de vista técnico se deduce que, además de los resultados logrados con las

reglas que figuran en los tercetos, se debe a Tartaglia la reducción de cualquier ecuación cúbica binomia a los tres tipos a los que aluden sus reglas. En cambio, no hay referencia alguna, en sus escritos, al caso irreducible, como tampoco al caso general de la ecuación cúbica completa.

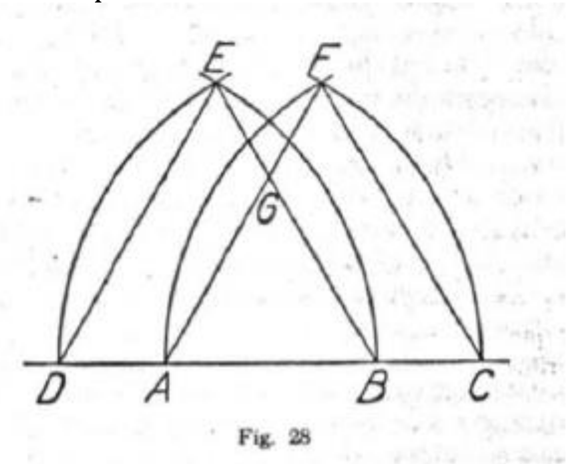


Fig. 28

De tales cuestiones volvió a ocuparse en *La travagliata inventione* de 1551, así como debía haberse ocupado de ellas en su obra máxima, el *Tratado general de números y de medidas*, que empezó a publicar en 1556. De los seis volúmenes aparecidos, los últimos cuatro son póstumos y el último de ellos no fue redactado por Tartaglia sino por un "docto matemático" sobre la base de los apuntes del autor. Este tratado es una obra enciclopédica, del tipo de la *Summa* de Pacioli. Los dos primeros volúmenes se refieren a la aritmética teórica y práctica; entre sus problemas citemos, como original, el de determinar la naturaleza del menor número de pesas diferentes con las que se puede pesar desde 1 hasta 40 libras, problema que se funda en la propiedad de descomponerse todo número en sumas de potencias de 2 o en suma algebraica de potencias de 3. Las tres partes siguientes se refieren a la geometría y tratan al final la resolución de construcciones geométricas con una sola abertura de compás. Por ejemplo, la primera proposición de los *Elementos*: construir un triángulo equilátero de lado AB dado, Tartaglia la resuelve de esta manera con la abertura de compás $r > AB$. Sobre las prolongaciones de AB y BA, respectivamente, toma los puntos C y D tales que $AC = DB = r$. Con

este radio y con centros *A, B, C, D* traza arcos de circunferencias que determinan los triángulos equiláteros *ACF* y *DBE*: la intersección de *AF* con *BE* determina el punto *G* que, con *AB*, da el triángulo pedido.

La última parte del Tratado se refiere al álgebra, pero desgraciadamente termina con las ecuaciones cuadráticas, sin entrar en las cúbicas.

Además de estas obras y de los *Contracartelli*, aparecidos con motivo de su polémica con Ferrari, se debe a Tartaglia la primera edición italiana de los *Elementos* (una anterior de Pacioli se ha perdido), así como versiones y ediciones de obras de Arquímedes y Jordanus Nemorarius.

(2) Cardano y su obra. Cardano es una de las figuras más curiosas del Renacimiento. De vida poco feliz y llena de alternativas, en sus últimos años redactó una Autobiografía (que apareció póstuma en 1643) en la que no escatima vicios ni defectos. Escritor prolífico, sus escritos se ocupan de temas de toda índole. Como fue un jugador conocedor de todas las tretas y fullerías del juego, que en ocasiones tuvo que utilizar como modus vivendi, se explica que en un escrito especial, *Liber de Ludo aleae* (póstumo), se ocupara de los juegos de azar, lo que lo convierte en el iniciador del cálculo de probabilidades.

Su primer escrito matemático es un tratado de aritmética de 1539, pero su obra más importante es *Ars magna*, que debe considerarse el primer tratado de álgebra merecedor de este nombre.

En ese tratado Cardano se expresa así respecto de la invención de la solución de las cúbicas: "En nuestros tiempos Scipione Del Ferro, boloñés, resolvió el capítulo de cubo y cosas igual a número, hazaña realmente hermosa y admirable. Este arte, verdadero regalo de los dioses, que supera toda sutileza humana posible y el esplendor de todo ingenio mortal, es una prueba del valor de las inteligencias y es tan maravillosa que quien la haya logrado puede creer que ya nada le ha de ser imposible".

En emulación con el matemático mencionado Niccolo Tartaglia, de Brescia, amigo nuestro, habiendo entrado en disputa con Antonio María Florido, discípulo de Del Ferro, y a fin de vencer en

la justa encontró el mismo capítulo y me lo confió, pues con insistentes ruegos se lo había pedido.

En verdad, engañado yo por las palabras de Luca Pacioli, que afirmaba que además de sus capítulos no podían existir otros generales, y aunque el descubrimiento hubiera podido ser facilitarlo por otras cosas que yo había encontrado, con todo desesperaba de encontrar lo que no tuve el coraje de buscar.

Después de obtener ese capítulo y hallada su demostración, comprendí que podían deducirse muchas cosas más; ya aumentada mi confianza llegué a encontrarlas, en parte por mi cuenta, en parte con la ayuda de Ludovico Ferrari, antiguo discípulo mío. Todo lo que éste encontró será indicado con su nombre, y aquello que no se atribuye a otro, me pertenece.

Respecto de las cúbicas, Cardano agrega la transformación de las ecuaciones cuadrinomias en trinomias, al mismo tiempo que asoman algunos atisbos acerca de las raíces negativas, que llama falsos, y hasta de las imaginarias, así como de las relaciones entre los coeficientes y las raíces. En sus ejemplos aparecen también transformaciones de las ecuaciones, con el objeto de hacer aparecer factores lineales que, al eliminarse, disminuyen el grado de la ecuación.

En cuanto a las ecuaciones de cuarto grado expone el método de resolución que, con gran complacencia, atribuye a su discípulo Ferrari.

(3) La obra de Ferro: El problema que dio lugar a la ecuación de cuarto grado que Ferrari resolvió, por el método que hoy lleva su nombre, es el siguiente: descomponer el número x^{10} en tres partes en proporción continua, tal que el producto de los dos primeros términos sea 6.

Ferrari toma como incógnita el medio proporcional y llega a una ecuación de cuarto grado que, con nuestros símbolos es: $x^4 + 6x^2 + 36 = 60$. El método de Ferrari consiste en transformar esta ecuación, mediante la introducción de un término indeterminado, en una diferencia de cuadrados. La manera como trató Ferrari a su ecuación, que hoy se simplifica, es la indicada por las transformaciones siguientes:

$$x^4 + 12x^2 + 36 = 60x + 6x^2 \quad ; \quad (x^2 + 6)^2 = 60x + 6x^2 \quad ;$$

$$(x^2 + 6)^2 + 2y(x^2 + 6) + y^2 = 60x + 6x^2 + 2y(x^2 + 6) + y^2$$

$$(x^2 + 6 + y)^2 = 2x^2(ty + 3) + 60x + y^2 + 12y.$$

Para que el segundo miembro sea un cuadrado perfecto el valor de y deberá satisfacer la cúbica: $(y + 3)(y^2 + 12y) = 480$ cuya raíz y dará, como valor de x, la raíz de la cuadrática

$$x^2 + 6 + y = x\sqrt{2y + 6} + \frac{30}{\sqrt{2y + 6}}$$

Otros aportes matemáticos de Ferrari se encuentran en los *Cartelli* intercambiados con Tartaglia donde, por ejemplo, en la segunda respuesta de Tartaglia, de 31 problemas que éste propone a Ferrari, más de la mitad se refieren a construcciones geométricas con una sola abertura de compás, mientras que los restantes son cuestiones aritméticas relativamente sencillas: cuestiones a las que Ferrari responde con creces y en forma concreta, aunque lo hace más de seis meses después, con motivo de remitir a Tartaglia el quinto cartel. Pero ya en el tercero había propuesto a Tartaglia 31 cuestiones mucho más difíciles y de todo orden: matemáticas, astronómicas, metodológicas y filosóficas. Entre las cuestiones algebraicas algunas exigían cúbicas y hasta ecuaciones de grados superiores, otras eran problemas de máximo; por ejemplo, dividir un número dado en dos partes tales que su producto por su diferencia sea máximo, problema que figura en un escrito de Cardano. En su respuesta Tartaglia contesta a 26 de esas cuestiones y no todas correctamente; por ejemplo, en el problema de máximo da la solución exacta pero sin la demostración, lo que permitirá afirmar a Ferrari que la cuestión no había sido resuelta. Más tarde, en su *General Trattato*, Tartaglia incluirá esa cuestión con la demostración.

(4) Los "tercetos" de Tartaglia. Damos en traducción libre en prosa con un breve comentario final, los tercetos con que Tartaglia

enseño a Cardano las reglas para resolver la ecuación cúbica, en las tres formas en que en esa época podía presentarse la ecuación. A la derecha se da la traducción de las reglas en símbolos modernos.

Cuando el cubo más las cosas es igual a un número, debes buscar dos números cuya diferencia sea este número y cuyo producto sea igual al cubo de la tercera parte de las cosas conocidas; la diferencia de sus raíces cúbicas es la cosa principal.

$$x^3 + px = q$$
$$u - v = q$$
$$uv = \left(\frac{1}{3}p\right)^3$$
$$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = x$$

Cuando, en cambio, el cubo está solo debes seguir esta regla: dividirás el número en dos partes tales que el producto sea igual al cubo del tercio de las cosas, y entonces la suma de las raíces cúbicas de esas partes dará lo que buscas.

$$x^3 = px + q$$
$$u + v = q$$
$$uv = \left(\frac{1}{3}p\right)^3$$
$$\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} = x$$

El tercer caso, si bien miras, se resuelve como el segundo, al cual mucho se parece. He encontrado estas cosas en 1534, con sólidos fundamentos, en Venecia.

$$x^3 + q = px$$

Mientras el primer caso, que siempre tiene una sola raíz positiva, no ofrece mayor dificultad y la regla de Tartaglia es siempre válida, en el segundo caso puede fallar esa regla en el llamado, más tarde, "caso irreducible" $(27q^2 < 4p^3)$. Cuando Cardano plantea a Tartaglia un ejemplo que lleva precisamente a ese caso, Tartaglia no contesta. Más discutible es lo que expresa Tartaglia al final de sus tercetos, al aludir, sin mayor especificación, al tercer tipo de ecuación cúbica. Pues en ese caso, o bien la regla no es aplicable por aparecer otra vez el caso irreducible, o bien al aplicarse la regla del segundo caso, si, $(27q^2 < 4p^3)$ no se obtiene sino el valor absoluto de la raíz, que ahora es negativa. Como es claro que el valor absoluto no satisface la ecuación y los números negativos no eran entonces admitidos ¿qué quiere decir Tartaglia con su elíptico lenguaje?

(5) Los "*Cartelli*" y "*Contracartelli*". La cuestión que en la primera mitad del siglo XVI suscitó la resolución de las ecuaciones cúbicas, en la que intervinieron Tartaglia, Cardano y Ferrari, tuvo su fin en el desafío público entre Tartaglia y Ferrari (éste instigado probablemente por Cardano), mediante "*carteles*" y "*contracarteles*" que ambos adversarios se lanzan. Esos carteles de desafío contenían cuestiones matemáticas, no sin improperios, que se proponían al adversario mientras se imprimían y difundían con profusión.

Hubo seis de esos *Cartelli di matematica disfida* de Ferrari (que constituyen su única colaboración matemática escrita), y seis *Controcartelli* de Tartaglia en respuesta de los anteriores. El acto público poco edificante con que terminó el desafío, tuvo lugar en Milán en el atrio de una iglesia.

(6) El *Álgebra* de Bombelli. Esta obra es la última de los, algebristas italianos del siglo XVI y, por lo menos su redacción, es posterior a la polémica Tartaglia-Ferrari, de ahí que se haya fijado como fecha del manuscrito el año 1550. Entre esa fecha y la primera edición de 1572 (de los tres primeros libros, pues los dos últimos quedaron inéditos hasta 1929) el autor conoció la obra de Diofanto, conocimiento que tuvo en él gran influencia, como se comprueba comparando el manuscrito de toda la obra con la parte impresa.

El *Álgebra* de Bombellí es importante no sólo por las innovaciones, algunas patentes y otras latentes, que introduce, sino también porque mide el progreso que se va realizando en el proceso de disolución del imperialismo geométrico de la ciencia griega, reflejado en la absorción de la geometría por el álgebra, que en cierto momento será casi total.

En su primer libro, el *Álgebra* de Bombellí supone conocidas las reglas de las operaciones con números racionales, para entrar de lleno en las operaciones con radicales. Aparece un método de raíz cuadrada aproximada que preludia las fracciones continuas y, en una construcción geométrica de la raíz, por primera vez el segmento unitario. Extiende el método de aproximación a la raíz cúbica, dando de ella construcciones geométricas "instrumentales", como él las llama, y "a pedido de amigos" trata también de la

extracción de raíces cuartas, quintas, etcétera, aunque reconoce su escasa utilidad.

A continuación expone las operaciones con raíces cuadradas y cúbicas, en especial de los tipos que se presentan en las ecuaciones de tercer grado. Utiliza, a semejanza con otros autores, como símbolo de la raíz una *R* seguida de una *q* o de una *c*, según se trate de raíz cuadrada (quadrata) o cúbica, encerrando el radicando en un doble ángulo recto que en el texto impreso se convierten en dos *L* invertidas. Pero la novedad más importante que introduce Bombelli en su *Álgebra* es el tratamiento de los números complejos y de sus operaciones. Mientras que en el manuscrito aparecen los números imaginarios como raíces cuadradas de números negativos, en el texto, de más de veinte años después, utiliza un simbolismo especial para esos números. Dice textualmente en el libro impreso: "He encontrado otra especie de raíces cúbicas ligadas (se refiere a las raíces cúbicas de irracionales cuadráticas) que se presentan en la cuestión de cubo igual a tantos y números después de haber leído a Diofanto, Bombelli utiliza la expresión "tantos" en lugar de "cosas", cuando el cubo de la tercera parte de los tantos es mayor que el cuadrado de la mitad del número (es nuestro caso irreducible) y esa especie de raíz cuadrada tiene en el algoritmo otro nombre y otras operaciones. Como en este caso esa parte no puede llamarse ni más ni menos, la llamaré más de menos cuando deba agregarse y menos de menos cuando ha de restarse… que a muchas personas ha de parecer más sofistico que real, como supuse yo también hasta que encontré su demostración geométrica… Expone luego correctamente las operaciones con los símbolos *pdm* y *mdm* (por piú di meno y memo di meno) en la misma forma que se hace actualmente con sus equivalentes *i* y - *i*, agregando que cada vez que aparece una de esas expresiones, aparece también la conjugada. A continuación opera con estos nuevos símbolos, dando reglas que luego necesitará en el caso irreducible, para calcular la raíz cúbica de los números que actualmente llamamos complejos. Veamos un ejemplo numérico de Bombelli, agregando a la derecha las ecuaciones y expresiones con símbolos modernos que justifican aquellas reglas, que por lo demás sólo son válidas para valores racionales.

Sea obtener la raíz cúbica de 52 + 47i. Súmense los cuadrados de ambos números, lo que da 4913 que es el cubo de 17. Búsquese ahora un número cuyo cuadrado sea menor que 17 y cuyo cubo sea mayor que 52. Ese número no puede ser sino 4. Si es así, la raíz será 4 + i, cuya suma de los cuadrados es l7 y el cubo del primer número menos el triple del primero por el cuadrado del segundo, que es 12, es 52.

$$\sqrt[3]{a+bi} = u + vi$$

$$a^2 + b^2 = (u^2 + v^2)^3$$

$$u^2 < \sqrt[3]{a^2 + b^2}$$

$$u^3 > a$$

$$u^3 - 3uv^2 = a$$

El libro II del *Álgebra* se ocupa de polinomios y de ecuaciones. Indica los monomios de una letra con el coeficiente y el exponente en su parte superior encerrado en un semicírculo y expone las reglas operatorias de los monomios y polinomios hasta la división de un polinomio por un binomio lineal con coeficiente unitario de la variable.

En cuanto a las ecuaciones, pasa ordenadamente desde las ecuaciones más simples de primer grado hasta las ecuaciones completas de cuarto grado, aunque siempre con coeficientes positivos, lo que le obliga a estudiar numerosos casos particulares y, con alguna excepción, nunca con el segundo miembro nulo.

Su algoritmo del *pdm* y *mdm* le permite obtener las raíces complejas conjugadas de una ecuación de segundo grado sin raíces reales.

Al respecto dice Bombelli (utilizamos símbolos actuales): Si deseas igualar $x^2 + 20$ a $8x$ siendo el cuadrado de la mitad de los tantos: 16, menor que 20, esa igualación no podrá hacerse sino de esta manera sofistica. Resta 20 de 16, será -4, cuya raíz es 2i que agregamos y restamos a la mitad de los tantos, obteniendo 4+2i ó 4-2i, y cada una de estas cantidades, separadamente, será el valor del tanto.

Es claro entonces que su mayor contribución a la teoría de ecuaciones será la resolución, mediante su algoritmo como intermediario, del caso irreducible de la ecuación cúbica. Así, por ejemplo, sea igualar x^3 a $15x + 4$. En ese caso, dice Bombelli,

tómese la tercera parte de los tantos, que es 5, y elévese al cubo, que es 125, el cual debe restarse del cuadrado de la mitad de los números que es 4; se obtiene m 121, cuya raíz cuadrada será *pdm* 11 (es decir 11*i*). Esta raíz, agregada a la mitad del número, hace 2 *pdm* 11, cuya raíz cúbica es 2 *pdm* 1, que agregada a su residuo (el conjugado) 2 *mdp* 1 da 4, que es el valor del tanto (la raíz de la ecuación).

En realidad, como lo reconoce Bombelli, la regla sólo es válida en el caso en que la raíz sea racional o irracional cuadrática de parte real racional no nula, pero insinúa la relación entre el caso general y la trisección del ángulo.

También es notable en Bombelli el estudio general que emprende de la ecuación de cuarto grado, que ni Ferrari ni Cardano habían llevado a cabo, así como lo es todo lo referente a la teoría de ecuaciones: cambio de signo de las raíces, sustitución de la incógnita por un valor proporcional a su reciproco, o por otra incógnita sumándole o restándole un número, etcétera; transformaciones que utiliza para reducir toda cúbica a las formas canónicas.

En el tercer libro del *Álgebra* es donde se nota más la influencia de Diofanto. Es una colección de 273 cuestiones, más de la mitad de las cuales no son sino transcripciones de problemas de la *Aritmética* de Diofanto.

Como novedad interesante anotemos que una cuestión se resuelve con letras, cuando trata la división de 12 + *a* en dos partes, cuyo producto sea 20.

Los libros cuartos y quintos, que comprenden la "parte geométrica", son en verdad de álgebra geométrica en el cabal sentido de la expresión. Después de haber expuesto la construcción geométrica de las figuras y equivalencias elementales, pasa a la resolución geométrica de las operaciones aritméticas, incluyendo la raíz cúbica, mediante la determinación de dos medias proporcionales. Aplica esas construcciones, en primer lugar, a la resolución de las ecuaciones de primero, segundo y tercer grado, y luego a numerosos problemas geométricos en los que pone a contribución la geometría, el álgebra y el hoy denominado "cálculo gráfico". En definitiva, toda la geometría de Bombelli es una prueba

de su afirmación: "todo lo que se hace con números puede hacerse también con líneas".

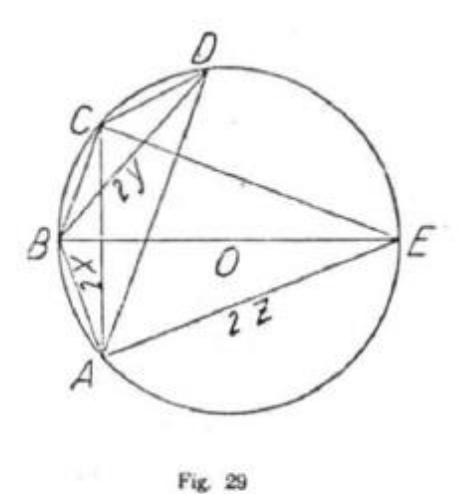


Fig. 29

Por ejemplo, demuestra gráficamente la propiedad básica de las cúbicas de ser su raíz suma de dos segmentos, cuyo producto y suma de los cubos son conocidos. Es interesante también una solución gráfica aproximada de la raíz de la cúbica $x^3 = px + q$, que se funda en la proporcionalidad $x{:}p = \left(x + {}^{q}/_{p}\right){:}\,x^2$, válida para x pequeña, que incluye el caso irreducible. Por último, veamos cómo la construcción del eneágono regular lo conduce a una cúbica del caso irreducible, a la cual no puede aplicar su método de resolución. Sea un círculo de diámetro $BE = 2r$, y $AB = BC = CD = 2x$ tres lados consecutivos del eneágono convexo, por tanto $AC = BD = 2y$, el lado del eneágono cóncavo, y $AD = a$, el lado del triángulo equilátero. Si $AE = CE = 2z$, tendremos por una parte $x^2 + y^2 = z^2$ y por otra, en virtud de los cuadriláteros inscritos $ABCD$ y $ABCE$, $y^2 = ax + x^2$; $xz = ry$. Si entre las tres ecuaciones se elimina z e y, se llega a $x^3 + {}^{1}/_{3}\,a^3 = a^2x$. En su ejemplo Bombelli toma $2a = 6$ y llega a la ecuación, $x^3 + 72 = 36x$ que, concluye Bombelli, "hasta ahora no hay manera de resolver, pues no hay proporción entre sus partes". En efecto, de acuerdo con su regla, debería encontrarse un número entero comprendido entre 3 y $2\sqrt{3}$.

(7) Viète y su obra. Viète fue un magistrado y hombre de corte famoso, fuera del campo matemático, por su hazaña, nada simple, de descifrar los mensajes secretos que el rey de España enviaba a su ejército en Flandes. En sus contribuciones al álgebra aparece, vinculada con su "logística speciosa", una "ley de homogeneidad", según la cual sólo pueden compararse magnitudes de igual dimensión. Tales magnitudes son el lado, el cuadrado, el cubo, el cuadrado cuadrado, el cuadrado cubo, etcétera y sus géneros son la longitud, el plano, el sólido, el plano plano, el plano sólido, etcétera. En cuanto al simbolismo utiliza los signos + y - aunque, cuando el sentido de la sustracción es indeciso, utiliza el signo =. No tiene signo para la multiplicación y utiliza la raya para la división. En cuanto a los paréntesis, los sustituye por llaves y, a veces, por una barra horizontal. Pero su innovación más importante fue el uso de las letras, aunque su simbolismo literal no es muy adecuado, pues emplea exclusivamente letras mayúsculas, vocales para las incógnitas, consonantes para las constantes; por otra parte, la ley de homogeneidad complica su uso. He aquí, con símbolos de Viète, nuestra ecuación

$$\frac{ax}{b} + \frac{ax - ac}{d} = b$$

$\frac{B\ in\ A}{D} + \left\{\frac{B\ in\ A - B\ in\ H}{F}\right\}$ *Equalis B*, mientras que la identidad que expresa el cubo de una suma la escribe:

A cubus B in A quad. 3 A in B quad. 3 B cubo equalis $\overline{A + B}$ *cubo.*

En su *Isagoge* y en otras obras, algunas póstumas, Viète desarrolla casi todo el algoritmo algebraico actual correspondiente a las operaciones racionales, que aplica a numerosas cuestiones de análisis indeterminado y a las ecuaciones algebraicas. En el tratamiento de las ecuaciones de tercero y cuarto grados, introduce algunas modificaciones respecto de los métodos de los algebristas italianos. Así, en la cúbica, ya reducida y sometida a su ley de homogeneidad, $x^3 + 3b^2x + c^3 = 0$ sustitución, original de Viète, es $x = (b^2 - y^2) : y$, con lo cual la cúbica se transforma en la trinomia $y^6 - c^3y^3 - b^6 = 0$, que se reduce a cuadrática; del valor de y así obtenido deduce x.

En cuanto a la ecuación cuártica, simplifica algo la transformación de Ferrari. A la ecuación reducida $x^4 + a^2x^2 + b^3x + c^4 = 0$ agrega a ambos miembros $x^2y^2 + 1/4y^4$ de donde $(x^2 + 1/2y^2)^2 = x^2(y^2 - a^2) - b^3x + 1/4y^4 - c^4$. Al imponer la condición del segundo miembro cuadrado perfecto, se obtiene una cúbica en y^2.

En los sistemas indeterminados Viète está influenciado por Diofanto, aunque los clasifica según un orden lógico; otras cuestiones algebraicas están vinculadas con la geometría, en especial con la división del ángulo en partes iguales. Así reconoce que el caso irreducible de las cúbicas se reduce a la trisección de un ángulo.

Aunque admite coeficientes positivos y negativos, racionales e irracionales, no considera sino las raíces de una ecuación que anticipa el actualmente llamado “método de Newton”.

(8) El caso irreductible en Girard. La resolución de la cúbica por Girard, en el caso irreducible, mediante la trisección de un ángulo es la siguiente. Sea la ecuación $x^3 + px = q$ con la condición $(27q^2 < 4p^3)$ siendo p y q positivos. Considera una circunferencia de diámetro $AB = 2\sqrt{p/3}$, en la que, por la desigualdad anterior, existirá una cuerda $AC = 3\,q/p$. Si se triseca el ángulo $CAB = 3\alpha$, con $BAX_1 = \alpha$, la cuerda $AX_1 = x_1$ da la raíz positiva de la ecuación.

En efecto, basta sustituir los valores de $x_1 = 2\sqrt{p/3}\cos\alpha$ y de $q = 2/3\,p\sqrt{p/3}\cos 3\alpha$ en la ecuación, para comprobar que se satisface la identidad $4\,cos^3\,\alpha - 3cos = \cos 3\alpha$.

Si a partir de X_1 se divide la circunferencia en tres partes iguales, mediante los puntos X_2 y X_3, las cuerdas AX_2 y AX_3 proporcionan los valores absolutos de las otras raíces de la ecuación, en este caso ambas negativas.

Los progresos de la trigonometría y de la geometría

Sin ser tan espectaculares como en álgebra, durante el siglo XVI la trigonometría experimentó progresos, ya en el campo de la trigonometría plana y esférica propiamente dichas, ya en el campo de las funciones circulares y en la construcción de sus tablas.

A comienzos de siglo la trigonometría está aún vinculada con la astronomía. Recordemos que en la célebre obra de Copérnico; *De revolutionibus orbium coelestium*, tres capítulos están dedicados a las funciones circulares, dos de los cuales habían aparecido en 1542, año anterior al de la publicación de la obra de Copérnico, en un escrito de su editor, Georg Joachim, llamado Rheticus por el lugar de su nacimiento. Por lo demás, a Rheticus se deben, como a otros matemáticos del siglo, importantes aportaciones a la trigonometría. (1)

En conexión con los problemas planteados por las funciones circulares el problema de la cuadratura del círculo recobra durante el siglo un renovado vigor, y es probable que date de esta época la fama, frecuentemente fundada sobre la ignorancia de los términos del problema, de que gozó hasta fines del siglo pasado. No siempre esa ignorancia resultó perjudicial, por cuanto las refutaciones a las soluciones erróneas no dejaron de ser contribuciones positivas al problema, así como lo fue un conocimiento de valores cada vez más aproximados al número π, cuyo primer desarrollo en un algoritmo infinito ve este siglo, por obra de Viète. (2)

Quizá sea interesante agregar cómo los variados aspectos de este problema revelaban, sin que todavía se advirtiera, la unidad de la matemática. En efecto, un problema exclusivamente geométrico; de transformación de figuras equivalentes, se había convertido en un problema aritmético, la determinación del valor numérico de cierta razón, problema aritmético que había encontrado soluciones aproximadas en términos finitos, pero también una solución exacta mediante cierta combinación, ahora infinita, de signos matemáticos.

Frente a los progresos de la aritmética, del álgebra y de la trigonometría, sin duda notables, no cabe registrar iguales progresos en la geometría del siglo XVI, si se exceptúan las versiones y comentarios de las antiguas obras geométricas griegas, y la consolidación de la perspectiva como nueva rama de la geometría.

Es explicable el escaso interés que el siglo demostró por la geometría en sí. Por un lado, no era fácil superar los tratados perfectos de un Euclides, de un Arquímedes, de un Apolonio, que a través de versiones, ediciones y comentarios se difundieron durante el siglo. Por otro lado, la preferente atención que el siglo dedicaba a los problemas particulares y a las aplicaciones no dejaba mucho campo a la geometría pura, sin olvidar que muchos problemas geométricos se resolvían más fácilmente con el álgebra.

El más importante geómetra del siglo fue el italiano, de origen griego, Francesco Maurolyco que se ocupó también de óptica y de mecánica, pero cuya vasta producción en parte se ha perdido y en parte es póstuma, por lo que en su tiempo no ejerció mayor influencia. Comentarista y traductor de obras griegas, sus comentarios a *Cónicas* de Apolonio, lo llevaron a considerar el estudio de esas curvas deduciendo directamente sus propiedades del cono del cual eran secciones, y no a la manera de Apolonio como figuras planas, procedimiento ya utilizado por Johannes Werner, algo anterior, autor de la primera obra europea sobre cónicas.

A Maurolyco se debe la aplicación, en forma aún rudimentaria, del método de inducción completa en la demostración de ciertas propiedades de los números poligonales y poliédricos, que publicó en su *Arithmeticorum libri duo,* escrita en 1557 y aparecida en 1575. (3)

Entre los traductores y comentaristas cabe mencionar a Federico Commandino, a quien se deben, además de traducciones, contribuciones al estudio de los centros de gravedad y a la perspectiva, ya Clavius Christopher Schlüssel, conocido por el papel que desempeñó en la reforma del calendario de 1582 (Reforma gregoriana) y por la influencia que ejerció en la enseñanza mediante su edición comentada de los *Elementos* de Euclides. También en geometría se destacó Viète, al ocuparse de problemas clásicos y de su época.

Como respuesta al desafío que lanzó el holandés Van Roomen, la resolución de una ecuación de grado 45, Viète propuso el antiguo "problema de Apolonio", enunciado en la forma más general de construir, en todos los casos posibles, una circunferencia que pase

por puntos dados y sea tangente a rectas y circunferencias dadas, que estudió en su *Apollonius Gallus* de 1600.

En la segunda mitad del siglo XVI la perspectiva, hasta entonces tratada por los artistas a su manera, comienza a ser objeto de contribuciones de geómetras. Inicia esta labor el ya mencionado Commandino con un escrito de 1558 donde, después de referirse a la proyección estereográfica, pasa a ocuparse de la perspectiva.

Es posible que, para los artistas, una obra escrita por un geómetra excediera sus conocimientos; de ahí la aparición de obras que explicaran las reglas de la perspectiva en forma accesible a los artistas. En este sentido cabe mencionar *La práctica de la perspectiva*… obra muy útil a pintores, escultores y arquitectos… que en 1568 hace conocer Daniele Barbaro, pero en especial *Las dos reglas de la perspectivo práctica* del arquitecto Jacopo Barozzi, apodado "il Vignola" por el nombre de su ciudad natal. La obra apareció póstuma en 1583 con comentarios del dominico Egnazio (=Carlo Pellegrino) Danti, profesor de matemática y divulgador de conocimientos científicos. Esta obra del Vignola tuvo gran difusión y se tradujo a varios idiomas como también la tuvo otro de sus escritos, Las reglas de los cinco órdenes de arquitectura de 1562, que llegó a convertirse durante tres siglos en sinónimo de arquitectura.

Aunque se lo debe también a Giovanni Benedetti, científico que se ocupó en especial de temas de dinámica y que trató cuestiones vinculadas con la perspectiva, que incluyó en sus escritos geométricos, la obra mediante la cual esta rama de la geometría adquiere jerarquía científica es *Los seis libros de la perspectiva* que en 1600 publica Guidubaldo Del Monte, donde aparece por primera vez el teorema que demuestra que la perspectiva de un haz de rectas paralelas es en general un haz de rectas concurrentes.

Cerremos esta reseña de la matemática renacentista mencionando que es en 1556 cuando aparece en el Nuevo Mundo el primer libro impreso de matemática, un modesto Sumario compendioso de las quentas de plata y oro, que se publica en México.

Notas complementarias

(1) Las aportaciones a la trigonometría. Se debe a Rheticus el estudio sistemático de las seis funciones circulares, que aparecen por primera vez en Europa definidas mediante el triángulo rectángulo de hipotenusa el radio de la circunferencia fundamental. Fuera del seno y coseno, Rheticus no dio nombre especial a las demás líneas. Los nombres de tangente y secante aparecen en una obra de Thomas Fincke de 1583.

A Rheticus y sus continuadores; Valentín Otto y Bartholomaus Pitiscus, se debe la construcción de las tablas de esas funciones con gran precisión: ángulos de 10'' en 10'' y funciones hasta con 15 decimales, es decir tomando el radio hasta de 10^{15} unidades.

Pero tal tediosa tarea, que a veces insumió toda una vida, encontraba dificultades de impresión, no sólo por la naturaleza tipográfica de la obra, sino también porque no era fácil encontrar mecenas que ligaran su nombre a un tipo de libros de difusión limitada y muy especializados. Además, y esto fue lo más lamentable, tal tarea resultó en cierto modo inútil, pues a partir de la tercera década del siglo XVII esas tablas fueron paulatinamente reemplazadas, con ventajas, por las tablas de logaritmos de las funciones circulares, semejantes a la tabla con la que Napier había introducido el nuevo algoritmo en la aritmética.

Agregemos que en la obra de Pitiscus aparece por primera vez el término "trigonometría". Pero el máximo progreso en el estudio de las funciones circulares y sus aplicaciones a los triángulos se debe a Viète.

En lo referente a las funciones circulares, además de las relaciones comunes, Viète agregó las fórmulas que expresan el seno y el coseno del múltiplo de un arco en función del seno y coseno del arco, y así mismo las fórmulas que resuelven el problema inverso para la división de un arco en 3, 5, 7 partes. Estos conocimientos le permitieron resolver, en forma espectacular, un problema que el holandés Adrian Van Roomen había lanzado en 1593 como desafío a todos los matemáticos del mundo. Se trataba de resolver una ecuación de grado 45, en la que Viète reconoció que no era sino el

desarrollo del seno del múltiplo 45 de cierto arco desconocido, de ahí que "inmediatamente", como dice Viète, dio 23 soluciones de la ecuación (las otras 22 no las dio porque eran negativas).

En cuanto a la trigonometría, tanto plana como esférica, también aparecen en Viète los teoremas fundamentales, aunque en forma algo diferente de la actual, así como el empleo del triángulo suplementario de la trigonometría esférica.

Agregemos que la fórmula de recurrencia para los senos y cosenos de los múltiplos de los arcos está en escritos de Otto, mientras que la fórmula del área del triángulo esférico, extendida a los polígonos esféricos, aparece en obras de Girard y que en escritos del físico y geodesta Willebrord Snel figura la fórmula que da la suma de los senos y cosenos de arcos en progresión aritmética, que Arquímedes había dado en forma geométrica.

(2) El número π en el siglo XV. Mediante el antiguo método de Arquímedes, utilizando los polígonos inscritos y circunscritos de gran número de lados, y explotando las ventajas del sistema decimal y la práctica de las operaciones aritméticas, se llegó en el siglo XVI a obtener el valor de π con muchos decimales. Por ejemplo, el hábil calculista Rudolph van Ceulen llegó a dar el valor de π con 35 decimales en un escrito (póstumo) de comienzos del siglo XVII. Asimismo, en el siglo XVI aparecieron fracciones que daban el valor de π con buena aproximación. Mientras que el $^{22}/_{7}$ de Arquímedes no daba sino dos decimales $^{355}/_{113}$ exactos, el valor $^{355}/_{113}$ que circula en el siglo llega hasta la sexta decimal exacta.

También en este campo sobresale Viète. Fuera de una construcción muy aproximada del problema de la cuadratura del círculo, se le debe la primera expresión convergente, en producto infinito, de número π. Viète parte de la expresión del perímetro *P* de un polígono regular de 2^{n-1} lados y, utilizando de manera recurrente la expresión del seno del ángulo doble, en función del seno y coseno del arco, llega después de *n*-2 transformaciones a

$$\frac{4}{P} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\dots\ \cos\frac{\pi}{2^{n-1}}$$

Que, al pasar del polígono a la circunferencia, resulta la expresión límite

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\dots$$

que Viète da mediante una serie de raíces superpuestas de irracionales cuadráticos, expresiones algebraicas de los cosenos.

Un par de siglos después, Euler generalizó la expresión anterior tomando una poligonal regular de ángulo central 4θ,

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}\dots$$

(3) La inducción completa en Maurolyco. En las demostraciones por el hoy llamado método de inducción completa, Maurolyco procede como en el siguiente caso. Sea demostrar que la suma de los primeros n impares es el cuadrado del enésimo término. (En símbolos modernos $1 + 3 + 5 \dots + 2n - 1 = n^2$.) Empieza por demostrar esta propiedad general: si a un cuadrado de orden n se le suma el impar de orden n-1, se obtiene el cuadrado de orden $n + 1 (n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2)$. En virtud de tal proposición Maurolyco dice que si a la unidad, que es primer cuadrado y a la vez el primer impar, se agrega el segundo impar, se obtiene el segundo cuadrado $(1 + 3 = 4 = 2^2)$; si a este segundo cuadrado se agrega el tercer impar se obtiene el tercer cuadrado $(4 + 5 = 9 = 3^2)$; si a este cuadrado se le suma el cuarto impar se obtiene el cuarto cuadrado $(9 + 7 = 16 = 4^2)$ y aplicando indefinidamente esa propiedad queda demostrada la proposición general. En verdad, en Maurolyco la inducción completa no es un principio sino un método de demostración por aplicación reiterada de un mismo silogismo que, sin fundamento lógico, extiende indefinidamente.

EL SIGLO XVII

Descartes y la geometría analítica

Ya ha tomado cuerpo la expresión "revolución científica" para señalar el proceso que en el campo científico se inicia en Occidente en las primeras décadas del siglo XVII. Para la matemática, ese proceso fue singularmente favorable y fecundo: a su abrigo nace una notable conjunción del álgebra con la geometría que tomará más tarde el nombre de "geometría analítica"; surge el cálculo infinitesimal en su doble aspecto de algoritmo del infinito y de instrumento indispensable para el estudio de los fenómenos naturales y, por si eso no fuera bastante, el siglo asiste al nacimiento de la teoría de números, del cálculo de probabilidades y de la geometría proyectiva.

Claro es que tal florecimiento no se produjo por generación espontánea. Si fue fruto de las condiciones favorables de la época también lo fue del largo proceso que se inicia con el renacimiento matemático del siglo XIII, proceso que por un lado pone a Occidente en contacto con el saber antiguo a través del conducto árabe, saber que se afina y perfecciona con el conocimiento directo de las obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Diofanto y Pappus; por el otro, aporta un nuevo territorio a la matemática: el álgebra, diferente en forma y contenido de la geometría.

En el álgebra la abstracción matemática adquiere una jerarquía distinta, en cierto sentido superior, frente a la abstracción geométrica. Los objetos matemáticos dejan de ser exclusivamente números particulares que cuentan o miden las cosas del mundo, o figuras que aluden a los cuerpos y objetos naturales; ahora se hacen presentes nuevos objetos matemáticos: las letras, esas especies de la "logística speciosa" de Viète, símbolos que no se refieren a un número particular o a una cantidad geométrica especial, sino a todos los números, a todas las cantidades, letras “vacías”, como alguna vez dirá Descartes, que permiten ser llenadas

con cualquier contenido, con cualquier número o medida, sea cual fuere su naturaleza o la de sus magnitudes cuyas cantidades mide.

Por lo demás, los recursos del álgebra permiten unificar la aritmética aplicando un molde común a las propiedades de los números, cualquiera sea su índole, y conferir a la matemática métodos de una generalidad que la geometría no podía permitirse.

Por último, a la influencia del saber griego y del álgebra ha de agregarse otro factor favorable al desarrollo de la matemática en la edad moderna; un factor intrínseco a la ciencia moderna: la matematización del mundo o mejor una renovación de este proceso que se había producido entre los griegos y abandonado durante los tiempos medievales. Pero tal matematización del mundo moderno es distinta de la matematización antigua. En ésta el proceso era a cara descubierta; en la naturaleza idealizada, platonizante, de los antiguos, las figuras geométricas eran elementos del mundo. Baste recordar la óptica geométrica, la astronomía con sus excéntricas y epiciclos, las leyes de la palanca y del equilibrio de los cuerpos flotantes de Arquímedes.

La ciencia moderna seguirá sí la senda abierta por Arquímedes pero, obediente a los nuevos tiempos, devolverá esas leyes a su hábitat natural, el mundo físico, y la aplicación de la matemática a los fenómenos naturales no obedecerá ya a la abstracción matemática, sino al proceso lógico de abstracción lo que equivale a reconocer que el mundo es inteligible y está sometido a las leyes de la razón, por ende a su instrumento natural, la matemática. Las figuras geométricas ya no serán elementos del mundo sino, como dirá Galileo, son el lenguaje, la escritura del mundo y estarán, por lo tanto, al alcance de la mano.

La primera, cronológicamente, de las nuevas ramas matemáticas del siglo XVII es la actual geometría analítica, cuyo advenimiento se vincula con la obra de René Descartes, que en este campo está ligada a la de sus predecesores y contemporáneos, aunque tal vinculación es difícil de establecer, en parte por la escasa propensión de Descartes a reconocer métodos ajenos, haciendo casi imposible averiguar en sus escritos cuáles autores conoce, y en parte por el lugar y el papel que atribuye a la matemática en el campo de los conocimientos. Una de las características del pensamiento cartesiano es lo que se ha llamado su "afán cósmico",

es decir un anhelo de generalización y de absoluto, que le hace perseguir la realización de una física general, capaz de explicar completamente todo lo que el universo encierra en la tierra y en los cielos, meta que cree alcanzar con sus *Principios de la filosofía* de 1644, aunque ese afán es visible desde 1619, fecha de sus primeros descubrimientos (entre los papeles de Descartes se encuentra un breve escrito con la frase inicial: "10 de noviembre de 1619, cuando lleno de entusiasmo, descubrí los fundamentos de una ciencia admirable).

Es en virtud de ese afán que en Descartes la matemática no tiene un fin en sí: la considerará como modelo de la ciencia a la que dictará sus preceptos lógicos, servirá por eso admirablemente, a manera de cobayo, para ensayar su método, pero no será más que eso, un medio, un método. El uso que Descartes hace de los términos "matemática" y "matemáticas" da cuenta de este hecho. En efecto, Descartes habla de "matemáticas" cuando se refiere a sus estudios escolares y destaca entre ellas el álgebra y la geometría, reconociendo en estas ramas cierta sencillez y prioridad respecto de las demás, aunque para él la geometría, está siempre tan ligada a consideraciones sobre las figuras que no pueden ejercer el intelecto sin cansar mucho la imaginación", y en el álgebra "se está tan sujeto a ciertas reglas y ciertas letras que en lugar de una ciencia que eduque a la mente se convierte en un arte oscuro y confuso que la turba. De ahí que la vinculación que establecerá entre ambas ramas será precisamente para tomar "lo mejor del análisis geométrico y del álgebra, corrigiendo los defectos del uno por el otro", Pero, más allá de estas matemáticas, Descartes aspira a una ciencia única a una ciencia integral, ciencia que será la "matemática universal" -ahora en singular, restituyendo al vocablo su valor etimológico- que ha de explicar “todo aquello que pueda preguntarse acerca del orden y de la medida, no importando que la medida deba buscarse en números, figuras, astros, sonidos o cualquier otro objeto”; matemática universal de la cual "las matemáticas constituirán -como él dice- la envoltura".

Esta tendencia hacia una ciencia universal explica también el juicio, a veces hasta despectivo, que le merece a Descartes la matemática pura y el factor negativo que asigna al carácter formal de esta ciencia, cuyas disciplinas, dice "son tan abstractas que no

parecen tener ningún uso" y en cuyos problemas "acostumbran a entretenerse geómetras y calculadores ociosos". Tilda de “muy inútiles” las cuestiones de teoría de números que a veces “pueden ser resueltas mejor por un hombre paciente que examine cuidadosamente la sucesión de los números”.

En cambio verá una finalidad de la matemática en el método de demostración y en sus aplicaciones. Así dirá en el *Discurso* "las matemáticas tienen invenciones sutilísimas que pueden satisfacer tanto a los curiosos como facilitar todas las artes y disminuir el trabajo humano", y se asombra algo más delante de "que siendo sus fundamentos tan sólidos y estables no se hubiera edificado sobre ellas nada más importante", mientras que de la práctica matemática que ha realizado no esperará otra cosa "que acostumbrar a la mente a nutrirse de verdades y no satisfacerse con falsas razones".

Además, parece que mucho antes de la aparición del *Discurso* ya se había apartado de la matemática, pues en 1630 escribe: "en cuanto a los problemas, estoy tan cansado de las matemáticas y me ocupo tan poco de ellas, que no sabría ya tomarme el trabajo de resolverlos por mi cuenta". Sin embargo, no obstante esta desestimación de Descartes hacia la matemática pura y hacia el carácter formal que el álgebra introducía en ella, no obstante el desapego que le demuestra, su afán cósmico, su ansia de unificación lo lleva a realizar, quizá sin advertirlo, una revolución en aquella ciencia abstracta que desvalorizó; esa revolución es la unificación del álgebra con la geometría.

Aunque en la correspondencia y en los papeles póstumos de Descartes figuran cuestiones matemáticas, el único escrito matemático que publicó es *Géométrie*, tercero y último de los "ensayos" que figuran como apéndices del célebre *Discurso del método* para conducir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias. Además *La Dióptrica, Las Meteoros y La Geometría*, que son ensayos de este método, aparecido en 1637. Ya en el primer capítulo del Libro primero de los tres que componen la *Geometría*, había claramente de aquella unificación al titular su primer parágrafo: "Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de la geometría".

Esa unificación la lleva a cabo mediante un recurso muy simple. En efecto, una diferencia esencial entre los elementos geométricos (segmentos) y los elementos algebraicos (letras), que impedía su comparación, consistía en que mientras con las letras pueden realizarse operaciones aritméticas en número ilimitado obteniéndose nuevas combinaciones de letras, con los segmentos tales combinaciones quedan limitadas al caso en que la "dimensión" del resultado es 1, 2, 3, pues en los otros casos ese resultado deja de ser inteligible, es decir, de ser expresable en términos de figuras geométricas: líneas, superficies, sólidos.

Para eliminar tal limitación Descartes recurre a la idea simple del segmento unitario. Así como en aritmética, el número 1 agregado como factor o divisor a cualquier expresión aritmética o algebraica no altera su valor pero sí modifica arbitrariamente el número de factores o divisores, es decir su "dimensión", de igual modo Descartes, a fin de que "los segmentos se reduzcan tanto mejor a los números", adopta un segmento arbitrario como unidad y, operando convenientemente con él, reduce toda combinación de segmentos, cualquiera sea su "dimensión", a un segmento único, Por otra parte esa unidad irá “sobreentendida” y, de hecho, ni ella ni sus operaciones aparecerán, pues - y ésta es la segunda etapa de este proceso genial de Descartes – bastará indicar con una letra cada uno de los datos y el resultado con la combinación respectiva de las letras de acuerdo con las reglas del álgebra.

De ahí que a cada problema geométrico corresponderá cierta relación entre letras, es decir una ecuación. Si esta ecuación tiene una sola incógnita, su valor dará el segmento que resuelve el problema geométrico; si éste es "indeterminado", es decir conduce a una ecuación con dos o más incógnitas, lo reduce, a un sistema determinado, dando valores a todas las incógnitas menos una. De allí que, en el caso de tratarse de dos incógnitas, resultará que si una de éstas representa un segmento variable sobre una recta fija, uno de cuyos extremos es fijo y la otra coincide con uno de los extremos del segmento de dirección fija distinta de la anterior que representa la segunda incógnita, el otro extremo de este segmento dibujará una curva que resuelve el problema. Tal es la manera cartesiana de introducir el método que luego se denominó de las

coordenadas, aunque este nombre, no figura en los escritos de Descartes, como tampoco la mención especial de ejes.

De acuerdo con tales principios, Descartes inicia su *Geometría* indicando cómo se realizan con segmentos las operaciones: suma, resta, multiplicación, división y raíz cuadrada. Señala a continuación, al referirse a "Cómo pueden emplearse letras en geometría", el significado de la unidad "sobreentendida" con el siguiente ejemplo: Si ha de extraerse la raíz cúbica de $a^2b^2 - b$, debe entenderse que el primer término está dividido una vez por la unidad y el segundo término multiplicado dos veces por la unidad. Pasa luego a la resolución gráfica de la ecuación de segundo grado, de la cual da dos procedimientos distintos según tenga la ecuación una o dos raíces positivas. En el caso de raíces imaginarias el "problema propuesto es imposible", "El primer libro termina con un "ejemplo tomado de Pappus en el cual Descartes muestra, con legítimo orgullo, la excelencia de su método al resolver un problema que los antiguos sólo habían resuelto en casos particulares (1). Como en la resolución de ese problema pueden presentarse rectas o circunferencias (lugares planos), cónicas (lugares sólidos) u otra clase de curvas no conocidas por los antiguos, Descartes dice que antes de considerar el caso general "es necesario que diga algo en general de la naturaleza de las líneas curvas". Tal es el objeto del segundo libro, en el cual, después de criticar la clasificación de los antiguos en problemas planos, sólidos y lineales, introduce una clasificación poco feliz de las curvas planas algebraicas en géneros (en su *Geometría* no figuran curvas trascendentes, que denomina mecánicas), dando a continuación dos métodos, con sus correspondientes trazados mecánicos, para obtener curvas de género cada vez mayor. Con notaciones actuales las curvas obtenidas por esos métodos tienen por ecuaciones, respectivamente, $x^{4m} = a^2(x^2 + y^2)^{2n-1}$ y $xy = (y - a)Y$, donde Y es la ordenada de la curva de género inmediato inferior. Cuando Y es una función lineal se obtiene una hipérbola que, para Descartes, es entonces curva de primer género, mientras que, si Y es la ordenada de una parábola de ecuación $y = (x^2 - b^2): b$, se obtiene para $a = 2b$ la hoy llamada "parábola cartesiana", curva de tercer grado que resuelve el problema de Pappus para el caso particular de 5 rectas, que los antiguos no habían resuelto. Un segundo

problema, en el que Descartes pone a prueba su método, se refiere a la determinación de las normales a las curvas planas, "problema que me atrevo a decir que es el más útil y general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría". Se advierte la razón de esta afirmación cuando se piensa en la concepción cartesiana de la matemática, pues este problema se aplica, unas páginas más adelante, a la construcción de las normales a ciertos óvalos (hoy llamados óvalos de Descartes), que encuentran aplicación en su *Dióptrica*.

Aquí también aparece un rasgo original de Descartes, pues si bien su método para la determinación de normales o de tangentes, que es lo mismo, es algo engorroso, (2) tiene valor desde el punto de vista algebraico porque resuelve el problema de índole infinitesimal sin recurrir a nociones infinitesimales, amén de emplear en sus cálculos algebraicos el "método de los coeficientes indeterminados" de gran porvenir en matemática.

Al final del segundo libro Descartes hace una excursión, no muy feliz a las curvas del espacio.

El libro tercero de la *Geometría* es un tratado de álgebra cuyo objeto es la resolución de problemas, que llevan a ecuaciones de grado superior al segundo. Cabe señalar entre las propiedades que trata:

a) La reconstrucción de una ecuación conociendo sus raíces, supuestas reales, que distingue en verdaderas (positivas) y falsas (valor absoluto de las negativas). De tal reconstrucción deduce empíricamente la hoy llamada regla de los signos de Descartes, para determinar el número de raíces verdaderas y falsas de una ecuación (en verdad la regla da sólo un valor máximo y de igual paridad de ese número);

b) las transformaciones hoy comunes de las ecuaciones algebraicas: supresión del segundo término, cambio de signo de las raíces, multiplicación de las raíces por un valor constante, aumento o disminución de las raíces según un valor fijo, supresión de factores cuando se conocen raíces, etcétera. Al final de estas transformaciones aparece, por primera vez, la distinción entre raíces reales e imaginarias, dando a este último término el sentido que en una ecuación "pueden imaginarse raíces, en vista de su grado, que sin embargo no existen"; y

c) la resolución algebraica de las ecuaciones de tercero y de cuarto grado, donde no presenta mayores novedades: para la cúbica utiliza la regla "cuya invención atribuye Cardano a un llamado Scipion Ferreus y para la cuártica utiliza como transformación una combinación de los métodos de Ferrari y de Viète. Sin embargo, pueden anotarse un par de cuestiones interesantes. Los ejemplos que adopta permiten reconstruir la resolución completa, en términos algebraicos y con letras, de un problema geométrico. Toma un problema, también de Pappus, que no es sino el que había utilizado Girard para comprobar un caso de interpretación concreta de las raíces negativas, y después de exponer la solución geométrica de Pappus, plantea la ecuación, que resulta de cuarto grado, suprime el segundo término, aplica el método de Ferrari (sin citarlo) y deduce en la cúbica resultante, por simple observación, una raíz con la cual da la expresión algebraica de la solución del problema. En realidad. Descartes no da sino la raíz positiva menor, sin advertir que siempre existe otra raíz positiva. También es de interés la resolución gráfica de las ecuaciones algebraicas mediante la intersección de una curva con una circunferencia. (3) Esa curva es una parábola ordinaria en la resolución de las ecuaciones hasta de cuarto grado, resolución que Descartes aplica a los problemas de *Delos* y de la trisección, demostrando de paso que cualquier problema de tercero o de cuarto grado puede reducirse a uno de esos dos. Da fin a su *Geometría* con un verdadero alarde técnico al resolver gráficamente una ecuación completa de sexto grado, mediante la intersección de la "parábola cartesiana" (cúbica que para Descartes es una curva de segundo género) con una circunferencia y señala varias aplicaciones del problema: división de un ángulo en cinco partes iguales, construcción de polígonos regulares de 11 y de 13 lados, etcétera.

Creemos también de interés transcribir el párrafo final del libro: "Pero mi objeto no es escribir un libro abultado; trata más bien de muchas cosas en pocas palabras… si se considera que habiendo reducido a una misma construcción todos los problemas de un mismo género, he dado a la vez la manera de reducirlos a una infinidad de otras diversas y, así, de resolver cada uno de ellos, de una infinidad de maneras; y además de esto, que habiendo

construido todos los que son planos; cortando un círculo con una línea recta, y todos los que son sólidos, cortando también con un círculo una parábola y, en fin, todos los que son de grado más compuesto, cortando lo mismo con un círculo una línea que no es más que de grado más compuesto que la parábola no hay más que seguir el mismo camino para construir todos los que son más compuestos, hasta el infinito. Pues en materia de progresiones matemáticas, cuando se tienen los dos o tres primeros términos no es difícil encontrar los otros. Espero que nuestros descendientes me estén agradecidos no sólo por las cosas que aquí expliqué, sino también por aquellas que voluntariamente omití para proporcionarles el placer de descubrirlas".

Se advierte en esta frase, mejor que en cualquier otra, todo el pensamiento de Descartes frente a la matemática. Ahí está su escaso interés por el aspecto formal de la matemática Y por su índole técnica, que demuestra dominar: que los demás redescubran lo que él ya ha encontrado. Ahí, en cambio, está también su acentuación del valor metódico de la matemática, mostrando cómo sirve admirablemente de ejemplo, de modelo, de su precepto lógico de "conducir ordenadamente mis pensamientos comenzando por los objetos más simples y más fáciles de conocer para ir subiendo poco a poco gradualmente hasta los conocimientos más complejos… hasta el infinito", como se expresa en ese párrafo final de su ensayo.

Destaquemos, para terminar, algunas contribuciones más de Descartes a la matemática como, por ejemplo, los perfeccionamientos del simbolismo algebraico (4) que introduce en la *Geometría* y que reduce notablemente la diferencia con los actuales, y otras aportaciones geométricas y algebraicas diseminadas en sus papeles póstumos y en su abundante correspondencia motivada por frecuentes consultas y polémicas: el estudio de las parábolas de orden superior de ecuación $y = ax^n$; de la curva llamada hoja de Descartes (de ecuación $x^3 + y^3 = 3axy$); el conocimiento de la relación, que se atribuye a Euler, entre el número de caras, aristas y vértices de un poliedro y una interesante construcción geométrica de los diámetros de los círculos cuyos polígonos regulares circunscriptos de 4, 8, 16… lados tienen igual perímetro, cuyo límite daría una solución del problema inverso de

la rectificación de la circunferencia: dada la longitud de la circunferencia construir el diámetro.

Si en la *Geometría* de Descartes la aplicación del álgebra a la geometría aparece más bien como método, en otro matemático francés del siglo XVII, Pierre Fermat, esa aplicación se presenta más naturalmente como un recurso técnico. Fermat, no obstante sus ocupaciones oficiales de magistrado, dedicó con tanta eficacia su tiempo libre a la matemática que dejó honda huella en varias de sus ramas. Profundo conocedor de las obras clásicas griegas: Euclides, Apolonio, Diofanto, es probable que el estudio de Apolonio, de quien reconstruyo obras perdidas, tuviera cono consecuencia la memoria *Ad locos planos et solidos isagoge*, escrita antes de 1637 pero publicada póstuma en 1679, donde aparecen los principios fundamentales del método de las coordenadas, si no en forma tan extensa como en la *Geometría* de Descartes, por lo menos en forma tan clara o más. Lo mismo que Descartes, toma un eje de referencia y en él un punto fijo que considera el origen de segmentos variables, en general perpendicularmente, de manera que este segundo segmento dibujará un lugar diferente según sea la relación algebraica que vincula a los dos segmentos variables.

En esa memoria aparece la ecuación de la recta, que no figura explícitamente en Descartes. Si la recta pasa por el origen Fermat, que sigue el simbolismo de Viète, escribe *D in A aeq.B in E*, es decir $ax = by$, mientras que en el caso general su notación equivale a $c^2 - ax = by$. Igualmente, da la ecuación de la circunferencia, con centro en el origen o en un punto cualquiera, y de las cónicas, elementos con los cuales resuelve algunos problemas geométricos relativos a lugares planos y sólidos. En conexión con esos problemas Fermat estudia la resolución geométrica de ecuaciones mediante la intersección de curvas y, en el campo puramente algebraico, problemas de eliminación y racionalización. (5)

Debido a que la *Geometría* de Descartes se publicó como último apéndice de una obra en francés editada en Holanda, su difusión no fue inmediata. Se la logró, en gran parte, debido a los esfuerzos del profesor holandés Franciscus van Schooten, que en 1649 dio la versión latina de la *Geometría* con comentarios y se dedicó después a difundir y perfeccionar el método de coordenadas. Entre otros perfeccionamientos cabe mencionar las fórmulas de trasformación

de coordenadas, dadas por el mismo Schooten, y la primera idea de coordenadas en el espacio, que aparece en un escrito de Philippe de La Hire de 1679; aunque no se desarrolla hasta mediados del siglo XVIII, sistematizándose así la nueva rama de la matemática, denominada más tarde geometría analítica, como un saber matemático propio y distinto, tanto de la geometría de los antiguos como del álgebra de los árabes.

Notas complementarias

(1) El ejemplo tomado de Pappus. El problema que Pappus denomina "de las 3 o más rectas" se enuncia de este modo: Dadas $2n-1$ $(o\ 2n)$ rectas, determinar el lugar geométrico de los puntos tales que trazando por ellos $2n-1\ (o\ 2n)$ rectas, que forman, respectivamente con las anteriores ángulos dados, el producto de n segmentos así determinados esté en una razón dada con el producto de los $n-1$ restantes por un segmento dado (o de los n restantes). Al respecto Pappus dice que, si se trata de un número de rectas que no supera a 4, el lugar es plano o sólido, es decir recta o cónica, y que si se trata de 5 ó 6 el punto "se encontrará sobre cierta línea", agregando que "si fueran más de 6 rectas ya no puede decirse que se da la razón entre un objeto comprendido por cuatro rectas y otro formado por las demás, pues no hay nada que esté formado por más de tres dimensiones". Aunque añade: "sin embargo, poco tiempo antes de nosotros se ha acordado la libertad de hablar así sin designar, empero, nada que no sea inteligible". En efecto, el recurso empleado era el de dar los productos de las razones entre pares de segmentos homólogos, pero –agrega- tanto en este caso como en los anteriores de más de 4 rectas "no hay una síntesis ya hecha que permita conocer la línea".

Descartes muestra entonces cómo puede resolverse el caso general. Para eso supone, como siempre, el problema resuelto y "para salir de la confusión de todas esas líneas", considera como principales una de las dadas y una de las que hay que encontrar, y a ellas trata de referir las demás. Es decir, simplificando la figura,

toma la recta dada BA, el segmento $OA = x$ y al segmento y como elementos de referencia, y si BC es otra de las rectas, demuestra que el segmento z, según la dirección dada, es función lineal de x e y. En efecto, si $BO = a$; $AM = y$; $MN = z$; $AC = h$, siendo B y C las intersecciones de BC con AB y MA, respectivamente, los triángulos ABC y MNC, de lados de direcciones fijas, permiten escribir: $b(h + y) = z; h = (a + x)c,$ con b y c constantes, eliminando h resulta $abc + bcx + by = z$, terminando Descartes: "… se ve también que, multiplicando varias de estas líneas entre sí, las cantidades x e y que se encuentran en el producto, no pueden tener cada una más que tantas dimensiones como líneas haya. De modo que ellas no tendrán nunca más de dos dimensiones cuando se trate sólo de la multiplicación de dos líneas, ni más de tres cuando se trate sólo del producto de tres, y así al infinito",

Entonces, continúa Descartes, si el problema es a lo sumo de 4 rectas, dando un valor fijo a una de las incógnitas se obtendrá una ecuación de segundo grado, que permitirá obtener con regla y compás puntos del lugar geométrico.

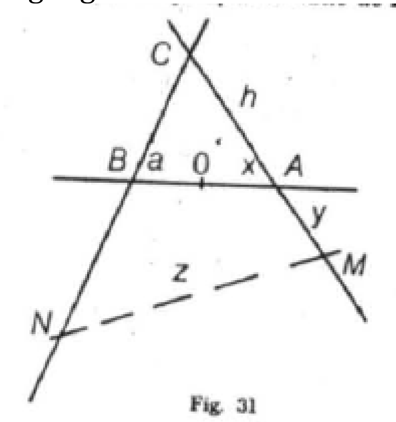


Fig. 31

En el libro segundo demostrará, además, que ese lugar será plano o sólido, mientras que si se trata de 5 o más líneas aparece una ecuación de un grado más compuesto, en cuyo caso Descartes designa el lugar como hipersólido. A continuación demuestra que el caso más simple de estos lugares está representado por la "parábola cartesiana", curva que resuelve el problema de Pappus cuando se dan cinco rectas, 4 de ellas equidistantes y paralelas y la quinta normal a las cuatro anteriores.

(2) La determinación de las normales según Descartes. El método algebraico de Descartes para determinar la normal a una curva en un punto de abscisa x_1 se traduce geométricamente en la determinación de la circunferencia con centro en el eje de la curva y tangente a la curva en ese punto. Si x_0 es la abscisa del centro de la circunferencia, el segmento de valor $|x_1 - x_0|$ es la subnormal. Para ello trata de que la ecuación que da los puntos de intersección de ambas curvas, tenga una raíz doble utilizando, si es necesario, el método de los coeficientes indeterminados, respecto del cual advierte que "puede servir a una infinidad de otros problemas".

Aunque Descartes se limita en su libro, a exponer el método en casos particulares, quizá sea conveniente verlo en general.

Sea $y^2 = a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n$ la ecuación de la curva y $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$ la de la circunferencia en el punto de abscisa x_1. Descarte identifica entonces:

$(x - x_0)^2 + a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n - r^2 = (x - x_1)^2(b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-2}x^{n-2})$ con coeficientes b_1 indeterminados. Establece las ecuaciones resultantes de la identidad de polinomios y, mediante un ingenioso recurso, elimina las b_1, y llega al valor de $|x_1 - x_0|$ en función de las a_1, que resulta de la forma:

$1/2\,(a_1 + 2a_2x_1 + \cdots + na_nx_1^{n-1})$ que es fácil comprobar que es el valor de y_1y_1 es decir la subnormal.

(3) La resolución gráfica de las ecuaciones cúbica y cuadrática. El método utilizado por Descartes es el de la "parábola fija" y consiste en considerar la ecuación de cuarto grado reducida $x^4 = px^2 + qx + r$ (que para $r = 0$ coincide con una cúbica) como resultante de la eliminación de *y* entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ \left(x - \frac{1}{2}q\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}(p+1)\right)^2 = \frac{1}{4}(p+1)^2 + \frac{1}{4}q^2 + r \end{cases}$$

ecuaciones de una parábola fija de "lado recto" unitario y de una circunferencia de centro y radio dados por los coeficientes de la

ecuación, que Descartes determina o construye gráficamente tomando como elementos de referencia el eje y el vértice de la parábola fija.

(4) El simbolismo algebraico de la *Geometría*. Las innovaciones o modificaciones que introdujo Descartes en el simbolismo pueden resumirse como sigue. Aunque conoce el signo = prefiere utilizar para la igualdad un signo propio, semejante al actual para el infinito; cuando le conviene escribe el segundo miembro de una ecuación igual a 0 "pues es mejor -dice- considerar así en conjunto toda la suma, que hacer una parte igual a otra"; introduce el uso de letras minúsculas y la novedad, que se ha conservado, de indicar los valores conocidos con las primeras letras del alfabeto y las incógnitas con las últimas. Se le debe la introducción sistemática de los exponentes, con excepción de la segunda potencia, que escribe mediante los dos factores iguales (es posible que esta notación, que es la que probablemente haga más extraña la lectura de la Geometría a un lector actual, se deba a razones tipográficas, pues es más simple y requiere igual espacio que la expresión con el exponente). No usa paréntesis, y escribe en columna los factores que son sumas, agrupados por una llave que a veces omite; indica la raíz cuadrada como hoy con el vínculo, anteponiendo al radicando una C, cuando se trata de raíz cúbica. Como trabaja exclusivamente con números positivos debe distinguir los distintos casos de combinaciones de signos de los coeficientes, aunque cuando el signo puede ser indistintamente + o − lo indica poniendo un punto en lugar del signo, mientras que, como innovación superflua, indica con un asterisco la ausencia de un término de una ecuación por ser nulo su coeficiente.

(5) Una eliminación algebraica de Fermat. El método de Fermat, no muy diferente del actual, puede apreciarse mediante el siguiente ejemplo, en el cual se propone eliminar y entre las ecuaciones $x^3 + y^3 = c^3$ y $ax + y^2 + by = n^2$. Escribe ambas ecuaciones como fracciones iguales a 1, cuyos numeradores tengan como factor común la letra que debe eliminarse, en este caso:
$1 = y^3 : (c^3 - x^3) = (y^2 + by) : (n^2 - ax)$ de donde $y^2(n^2 - ax) = (y + b)(c^3 - x^3)$. Comparando esta ecuación con la segunda de las

dadas (ambas cuadráticas en y) y aplicando el mismo proceso se llega a una ecuación lineal en y, que despeja y sustituye en cualquiera de las dadas. Fermat utiliza, además, la eliminación para racionalizar expresiones. Sea, por ejemplo, racionalizar

$$b = \sqrt[3]{ax^2 - x^3} + \sqrt[3]{x^3 + c^2x}$$

Hace $y^3 = x^3 + c^2x$ y elimina y entre esta ecuación y $ax^2 - x^3 = (b - y)^3$

La teoría de números, las probabilidades y la geometría proyectiva

Ya dijimos que Fermat se dedicó a varias ramas de la matemática. De una de ellas puede considerarse iniciador, la teoría de números, campo en el cual dejó demostraciones y teoremas, algunos de los cuales hoy llevan su nombre.

En l62l había aparecido la edición greco-latina de la *Aritmética* de Diofanto, por el poeta y humanista Claude-Gaspard Bachet de Méziriac, autor por lo demás del primer tratado moderno de matemática recreativa, *Problèmes plaisants & delectables qui se font par les nombres* (1612, 2a edición aumentada 1624) que, además de los conocidos juegos con números y con naipes, trae algunas cuestiones más serias: construcción de cuadrados mágicos, problemas de análisis indeterminado, etcétera.

En los márgenes de un ejemplar de aquella edición de Diofanto, así como en su correspondencia, encontramos notas y resultados de las investigaciones que Fermat realizó en el campo de la teoría de números, de cuya novedad e importancia Fermat tenía plena conciencia. Así dice en sus comentarios: "La teoría de los números enteros, que es muy hermosa y sutil, no fue conocida hasta hoy ni por Bachet ni por otros" y, en otro lugar, "la aritmética tiene un dominio propio: la teoría de los números enteros que ha sido apenas esbozada por Euclides y no cultivada suficientemente por quienes le siguieron". (1)

Entre los resultados consignados en los márgenes del Diofanto figura la proposición, hoy célebre, que no es posible encontrar cuatro números naturales *x, y, z, n* para $n > 2$, tales que $x^n + y^n = z^n$. La celebridad de esta proposición reside en el hecho de que aún hoy, a tres siglos largos de Fermat, no se ha logrado dar una demostración general de esa proposición, ni comprobarse, aun con un solo ejemplo, que es falsa. Fermat la enuncia al comentar el problema de Diofanto de descomponer un cuadrado en suma de dos cuadrados, escribiendo en el margen del libro: "Por otro lado, es imposible descomponer un cubo en suma de dos cubos o un bicuadrado en suma de dos bicuadrados, o en general cualquier potencia en suma de dos potencias de igual exponente, con excepción del cuadrado. He encontrado una demostración de esa proposición, realmente maravillosa, pero el margen del libro es demasiado estrecho para contenerla".

Como la demostración general a que alude Fermat no apareció ni en la correspondencia ni en los papeles que dejó, es de presumir que efectivamente no dispuso de tal "demostración... maravillosa", que creyó en algún momento poseer, y que el hijo, al hacer conocer en 1670 la frase del margen del Diofanto, cometió una indiscreción que, sin embargo, los matemáticos han de agradecer por el estímulo que significó para el desarrollo ulterior de la teoría de números, que debe importantes capítulos a las investigaciones realizadas en pos de la pretendida demostración fermatiana.

Aplicando un método "de descenso infinito" (2) dice Fermat que ha demostrado la proposición para $n = 3$ y en otra ocasión afirma haberla demostrado para $n = 4$. Actualmente se ha demostrado la proposición de Fermat para extensas categorías de números, pero aún no se ha encontrado una demostración general. Tampoco se encontró ningún ejemplo que comprobara la falsedad de la proposición, no obstante las posibilidades que ofrecen actualmente las computadoras, que permiten manipular números grandes, únicos que en la situación actual podrían satisfacer la ecuación.

Por las circunstancias que rodearon a la cuestión y hasta por haber sido objeto de concursos con valiosos premios, ese problema, que a veces suele llamarse no muy propiamente "el gran teorema de Fermat", adquirió gran popularidad, aunque el descubrimiento más notable de Fermat en el campo de la teoría de números,

aparecido en una carta de 1640, es el de la periodicidad de los restos de las potencias de a al dividirlas por un número primo p no divisor de a, de manera que al llegar a la potencia de exponente p - 1 se reproduce el resto 1 (este teorema suele llamarse "el pequeño teorema de Fermat”). El teorema fue demostrado por Leibniz; Euler y Gauss generalizaron más tarde este descubrimiento en direcciones diversas.

Hablando de Fermat conviene recordar que, conforme a la costumbre de la época, numerosas investigaciones en el campo de la matemática, como en el de otras ciencias, fueron provocadas o estimuladas por los problemas o cuestiones que los científicos se dirigían en forma de propuestas o desafíos, a veces públicos.

De ahí que muchas contribuciones científicas de entonces figuren en la correspondencia de los científicos, que se tramitaba mediante intermediarios científicos, entre los cuales cabe destacar por su eficaz actividad, en Francia, el padre franciscano Marin Mersenne y, en Inglaterra, Henry Oldenburg, quien fue secretario de la Royal Society, fundada en 1660.

Así en teoría de números intervinieron, en tales cuestiones, en Francia Fermat, Descartes y Mersenne mismo, en Inglaterra Wallis y Brouncker, en Holanda van Schooten,…

La segunda rama matemática que tiene a Fermat de fundador, o cofundador con Pascal, es el cálculo de probabilidades, cuyos primeros problemas resueltos en el siglo XII nacieron en las mesas de juego y fueron propuestos por el caballero De Méré a Pascal, quien a su vez los propuso a Fermat; sin olvidar que el primer libro sobre juegos de azar, como ya recordamos, se debe a Cardano.

Los problemas propuestos, hoy clásicos, san el "problema de los dados" y el "problema de las partidas". El primer problema consistía en demostrar que en 4 tiros con un solo dado es más probable que salga un 6 que el caso contrario; y que en cambio, en 24 tiros con dos dados, es menos probable que salga un doble 6. En el segundo problema había que averiguar cómo debía distribuirse la bolsa entre dos jugadores de igual habilidad si se suspendía el juego antes de terminarlo y se conocían los puntos logrados por cada jugador en el momento de la suspensión.

En forma distinta, aunque con resultados concordantes, Fermat y Pascal resolvieron la cuestión. (3) Agreguemos que el nombre de

Fermat se vincula, como veremos, con el nacimiento del cálculo infinitesimal y con la óptica, pues en 1661 demuestra la ley de la refracción utilizando el principio de tiempo mínimo.

Como el de Fermat, el nombre de Blaise Pascal está vinculado con la historia de varias ramas de la matemática, además de figurar en la historia de la física, de la filosofía, de las letras y de la religión.

Con su contribución al cálculo de probabilidades se vincula un folleto de 1624 sobre el *Triángulo aritmético* (a veces inapropiadamente llamado "triángulo de Pascal"), donde aparecen los números combinatorios con su expresión general y algunas de sus propiedades.

También fue Pascal iniciador del cálculo mecánico, pues a los 18 años construyó una máquina de calcular que más tarde Leibniz mejoró. Últimamente se ha mencionado a un precursor alemán, que habría construido una máquina de calcular en la época del nacimiento de Pascal y algo más perfecta que la de éste.

Pascal fue un científico precoz, que aún niño redescubre, sin libros ni ayuda alguna, los primeros teoremas de geometría y que a los 16 años contribuye al resurgimiento de la geometría mediante un teorema que hoy lleva su nombre y que entonces fue llamado "exagrama místico", Pero, según propia confesión, ese teorema y otras propiedades de las cónicas que componían su *Essay pour les coniques* escrito en 1640, le habían sido inspirados por Girard Desargues, geómetra a quien conoció en las reuniones científicas que se celebraban en la celda del padre Mersenne y que más tarde dieron lugar a la creación de la Academia de Ciencias de Francia (1666).

Desargues fue un ingeniero militar y arquitecto a quien, no obstante su propia declaración de no interesarse en las investigaciones científicas sino en la medida que "puedan ofrecer al espíritu un medio de lograr algún conocimiento… de las cosas que puedan traducirse en actos para la conservación de la salud o en sus aplicaciones en la práctica de algún arte", se le puede considerar como el primer cultor de una de las ramas de la matemática más alejada de la realidad, la geometría proyectiva.

Preocupado por los problemas prácticos de la construcción de relojes de sol y del corte de piedras, se ocupó de perspectiva -sobre la cual publicó dos breves trabajos (1636, 1640)- y de propiedades

geométricas en un curso de lecciones que, a pedido de sus discípulos, se publicó en 1639 con el título *Brouillon Project d'une atteinte aux évenemenls des rencontres d'une cone avec un plan*, que constituye un tratado sobre las cónicas, con conceptos e ideas originales que hoy forman parte de la geometría proyectiva.

En su escrito Desargues observa que las tres cónicas -elipse, parábola e hipérbola- que se obtienen por proyección de una circunferencia desde un punto sobre un plano, deben tener las mismas propiedades que la circunferencia e inversamente. Eso lo lleva a distinguir las propiedades que se mantienen en la proyección y las que no se mantienen. Entre las primeras considera el grupo que hoy llamamos teoría de los polos y polares, añadiendo las propiedades de la involución (el término es suyo), con lo que demuestra una numerosa serie de propiedades de las cónicas, entre ellas las del cuadrivértice completo que hoy lleva su nombre. Extiende algunas de sus observaciones al espacio y se le debe la importante observación que un haz de rayos paralelos debe considerarse como de iguales propiedades que un haz de rayos concurrentes. Más tarde, en 1643, enunció, entre otros muchos y variados, el teorema hoy llamado de los triángulos homológicos.

Aunque apreciada por sus contemporáneos la obra de Desargues no tuvo influencia alguna. El estilo oscuro con que presentaba las nuevas ideas y su terminología, pero en especial el deslumbrante efecto que en esa época ejercían los métodos analíticos (geometría analítica, cálculo infinitesimal) sobre los matemáticos, hizo que el *Brouillon-Project* permaneciera desconocido por los sucesores, hasta que Chasles lo descubrió en 1845 en la única copia hoy existente, que para su uso personal había hecho confeccionar La Hire en 1679. La Hire había compuesto en 1673 un tratado sobre las cónicas, que estudia mediante una transformación geométrica y precisamente al referirse seis años después al tratado de Desargues se lamenta de no haberlo conocido antes, pues sin duda ese conocimiento le habría ahorrado el escribir el propio tratado, tan simples y generales le parecieron los métodos de Desargues.

Con todo habrá que esperar más de un siglo para que las propiedades proyectivas de las figuras, cuyo estudio inició

Desargues, vuelvan a ser objeto de investigaciones sistemáticas y formen una rama autónoma de la matemática.

Notas complementarias

(1) Algunas cuestiones de Fermat acerca de la teoría de números. Además del llamado "Gran teorema de Fermat", en los márgenes del Diofanto se encuentran los teoremas siguientes: Todo número primo de la forma $4n + 1$ sólo puede ser una vez hipotenusa de un triángulo rectángulo (de lados enteros); su cuadrado lo es dos veces, su cubo tres veces, etcétera (fue demostrado por Euler). Una suma de dos cubos puede descomponerse de infinidad de maneras en suma de dos cubos. Todo número es triangular o suma de 2 ó 3 triangulares; es un cuadrado o suma de 2, 3 ó 4 cuadrados; es pentagonal o suma de 2, 3, 4 ó 5 pentagonales, etcétera. Respecto de este enunciado agrega: "No puedo dar aquí su demostración, que depende de muchos y difíciles misterios de la ciencia de los números, respecto de este tema tengo intención de consagrarle todo un libro..." que jamás apareció.

En sus cartas aparecen, además del teorema de la periodicidad de los restos potenciales, los siguientes: "La ecuación $x^4 + y^4 = z^4$ no tiene soluciones enteras (fue probado por Euler). Ningún triángulo rectángulo de lados enteros tiene por área un cuadrado (fue probado por Lagrange). Todo entero primo mayor que 2 puede expresarse como diferencia de cuadrados de una sola manera.

Admitió, aun reconociendo que no podía demostrarlo rigurosamente que los números de la forma $2^{2^n} + 1$ son primos. En realidad se trató de una inducción precipitada, pues esos números son primos para $n = 0, 1, 2, 3, 4$, pero para $n = 5$, Euler demostró que era compuesto.

Fermat se ocupó, además, de números "poliédricos", de ecuaciones indeterminadas de grado superior, de números perfectos, de cuadrados y cubos mágicos, etcétera.

(2) El método de "descenso infinito". Este método, ideado por Fermat para resolver algunas de sus cuestiones de teoría de números, es una combinación de la inducción completa con la propiedad de tener un mínimo la sucesión de los números. Por ejemplo, he aquí cómo lo aplica en las proposiciones negativas. Sea demostrar que ningún triángulo rectángulo de lados enteros tiene por área un cuadrado. "Si hubiera algún triángulo rectángulo de lados enteros cuya área es un cuadrado, habría otro triángulo menor que el anterior con igual propiedad. Si hubiera este segundo triángulo con tal propiedad, por el mismo raciocinio existiría un tercero menor que el anterior con igual propiedad y luego un cuarto, un quinto, etcétera, hasta el infinito descendiendo. Ahora bien (entiendo hablar siempre de números enteros) dado un número no existen infinitos números menores que él, luego es imposible que exista un triángulo de lados enteros... "

En las cuestiones afirmativas combina el método con la reducción al absurdo. Así, para demostrar que todo número primo de la forma $4n + 1$ es siempre suma de dos cuadrados, dice: "si no se compone de dos cuadrados, existirá otro número primo de la misma forma menor que el anterior que tampoco se compone de dos cuadrados, y luego un tercero, etcétera, descendiendo al infinito hasta llegar al número 5 que es el menor de todos los números de este tipo y que por tanto no sería suma de dos cuadrados. Como esto es imposible, todos los números de esa naturaleza están compuestos de esa manera."

(3) Los problemas del caballero De Méré. En el problema de los dados Fermat, partiendo de la definición de la probabilidad como razón de los casos favorables a los casos posibles, demuestra que en el tiro con un solo dado, los casos posibles son $6^4 = 1296$ y los no favorables $5^4 = 625$, de manera que los casos favorables 671 > 625, comprueban el aserto. En el caso del tiro con dos dados, los casos posibles son 36^{24} y los no favorables 35^{24} de manera que la probabilidad buscada es $1 - (35/36)^{24}$ que, por ser menor que ½, vuelve a confirmar la afirmación del caballero De Méré, cuya pericia como notable jugador se revela al advertirse que en ambos casos la diferencia en un solo tiro invierte la probabilidad.

En el problema de las partidas Fermat utiliza la teoría combinatoria. Considera el ejemplo concreto en el que dos jugadores A y B suspenden el juego cuando al jugador A le faltan 2 puntos para ganar y al jugador B le faltan 3. Como a lo sumo la partida se habría terminado a las 4 jugadas, Fermat hace las 16 posibles combinaciones con repetición de dos letras a y b tomadas de 4 en 4, cuenta las combinaciones en las que a aparece dos o más veces y las restantes en las que b aparece tres o más veces. Como las primeras son 11 y las segundas son 5, Fermat deduce que las probabilidades de ganar están entre sí como 11 es a 5, proporción en la que debe entonces dividirse la bolsa.

Pascal llega a la misma solución, aunque razona algo diferentemente. He aquí sus palabras: "El siguiente es mi método para determinar la parte de cada jugador, cuando por ejemplo dos jugadores juegan un partido a tres puntos y cada jugador ha apostado 32 pistolas Supongamos que el primer jugador ha ganado dos puntos y el segundo jugador uno; ahora deben jugar por un punto en estas condiciones: si gana el primer jugador se lleva todo el monto de la apuesta, es decir 64 pistolas, si en cambio es el segundo jugador quien gana, cada jugador tiene dos puntos y estarán así en equilibrio, y si dejaran de jugar cada uno retirarían sus 32 pistolas. De modo que si el primer jugador gana las 64 pistolas le pertenecen, mientras que si pierde le pertenecen entonces 32 pistolas. Luego, si los jugadores desean no jugar ese juego y separarse sin jugarlo, el primer jugador podría decir al segundo: 'Tengo aseguradas 32 pistolas aun en el caso de perder el punto, en cambio respecto de las otras 32 pistolas puedo ganarlas o puedo perderlas, las chances son iguales. Dividamos entonces esas 32 pistolas en partes iguales y dadme además las 32 pistolas que tengo aseguradas". De ahí que el primer jugador tendrá 48 pistolas y el segundo 16 pistolas. Si se aplicara el procedimiento de Fermat a este caso se llegaría a igual resultado.

El cálculo infinitesimal: los precursores

Las consideraciones de índole infinitesimal son tan antiguas como la matemática misma, pues residen en la esencia misma de esa ciencia. En la mera sucesión indefinida de los números está enlarvado el concepto de infinito, en la ilimitada divisibilidad de los segmentos lo está el infinitésimo, y no deja de ser significativo que en el léxico matemático de hoy las expresiones infinito o infinitésimo actual o potencial conserven el sello que les imprimió Aristóteles, precisamente en los siglos en que nace la matemática como ciencia.

De ahí que se encuentren rastros de los métodos infinitesimales en todas las etapas de la evolución de la matemática. Asoman en las críticas de los eleatas y en algunas argumentaciones de los sofistas y adquieren categoría y rigor científicos en la teoría de las proporciones y en el método de exhaución de Eudoxo; método que en manos de Arquímedes y vinculado con el postulado de la continuidad le permite obtener rigurosamente resultados que hoy se logran con el algoritmo infinitesimal, circunstancia que convierte a Arquímedes en precursor de los métodos infinitesimales. Es indudable que la lectura de sus obras por los matemáticos del Renacimiento y modernos, influyó en el resurgimiento de esos métodos, resurgimiento que sin duda se habría acelerado de haberse conocido entonces el *Método*, no redescubierto hasta 1906.

Nuevamente asoman consideraciones de índole infinitesimal en los tiempos medievales, con la introducción del cero como símbolo operatorio, con la "regla de Merton" y con las primeras series convergentes de Oresme y Calculator, a las que cabe agregar las del portugués Álvaro Tomas, uno de los pocos matemáticos ibéricos del siglo XVI, quien no sólo calcula exactamente series geométricas o reducibles a geométricas, sino que da también el valor bastante aproximado de series convergentes, cuyo cálculo exige el conocimiento de funciones trascendentes (1). Ya vimos también cómo en el siglo XVI aparecen otros algoritmos infinitos: las fracciones continúas de Cataldi, el producto infinito de Viète para π,…

A este proceso interno se agregará en el siglo XVII la presión externa que ejercerán la mecánica y la astronomía, en cuyo

desarrollo los métodos infinitesimales desempeñarán papel decisivo.

En el siglo de la revolución científica, las primeras consideraciones de índole infinitesimal son claras reminiscencias de la influencia de Arquímedes aunque ahora, al compás de los nuevos tiempos, los rigurosos aunque engorrosos métodos griegos, se interpretan con una desenvuelta libertad de razonamiento, no exenta de falta de rigor, que se suple en vista de la exactitud de los resultados y, más tarde, por la utilidad y eficacia que muestran los nuevos métodos en las aplicaciones.

Así Stevin, en 1586, para determinar el centro de gravedad de un paraboloide de revolución, circunscribe a ese sólido un número de cilindros de igual altura que va duplicando y comprueba que el centro de gravedad de esos cilindros, fácil de determinar, se acerca indefinidamente a un punto fijo, que es entonces el centro de gravedad buscado. Ese método muestra semejanza con el método que utilizó Arquímedes en la determinación geométrica, no mecánica, de la cuadratura de la parábola. En ambos casos el resultado, que se admite conocido, es el valor límite de una sucesión convergente, pero mientras que Stevin se limita a comprobar, sobre la base de los tres o cuatro primeros términos de la sucesión, que su límite es cero, Arquímedes, sobre la base del valor de la suma de un número finito de términos de una progresión geométrica de razón menor que la unidad, llega al resultado mediante el riguroso método de exhaución.

En este sentido da un paso más adelante el italiano Luca Valerio, calificado por Galileo como “el Arquímedes de nuestro tiempo”, quien en un tratado de 1604 modifica el raciocinio de Stevin mediante un teorema general, según el cual si se inscribe o circunscribe una figura escaloide (en forma de escalerilla) formada por polígonos, prismas o cilindros, a una figura plana o sólida, la diferencia entre los escaloides inscritos y circunscritos puede hacerse tan pequeña como se quiera y por lo tanto (ahora sin demostración) será también tan pequeña como se quiera la diferencia entre uno de esos escaloides y la figura dada, resultado que admite sobre la base de razonamientos geométricos intuitivos, no rigurosos.

También sigue las huellas de Arquímedes, Johannes Kepler cuya obra matemática más importante, *Nova stereometria doliorum vinariorum* de 1615 contiene consideraciones de índole infinitesimal. Por razones más de orden práctico que teórico, ese tratado le fue sugerido a Kepler, en un año de abundante cosecha de uva, por el propósito de comparar las capacidades de los toneles entonces en uso, con el fin de determinar las dimensiones más convenientes desde el punto de vista del material mínimo a emplearse para lograr igual volumen.

Para ello estudió la cubatura de numerosos cuerpos de rotación, obtenidos haciendo girar circunferencias, elipses o arcos de estas curvas o de las otras cónicas, alrededor de ejes paralelos a los ejes de aquellas. En esa forma describe y denomina, generalmente con nombres derivados de frutas, más de 90 cuerpos.

La primera parte del tratado de Kepler se inicia con las cuadraturas y cubaturas de Arquímedes, pero sin utilizar el método de exhaución, sino recurriendo directamente a expresiones de carácter "infinitesimal", admitiendo "como si" las figuras estuvieran compuestas de infinitas figuras infinitamente pequeñas de áreas o volúmenes conocidos. Así supone que el círculo o la esfera están compuestos de pequeños triángulos o conos, respectivamente, de vértices en el centro y de base una pequeña porción del círculo o de la esfera. De esa manera el círculo equivale a un triángulo de altura el radio y de base la longitud de la circunferencia, y la esfera a un cono de altura el radio y de base la superficie de la esfera. Como estos resultados, y otros semejantes, coinciden con los obtenidos penosamente por, el engorroso método de exhaución, aplica iguales consideraciones a los cuerpos nuevos que describe, cuando no los puede reducir a casos conocidos, (2) y logra dar, no siempre con éxito, su volumen.

Además dada la índole del problema que lo había conducido a estudiar el tema, Kepler se ocupa de cuestiones de máximo y mínimo, que resuelve empíricamente mediante la observación de cuadros de valores numéricos. De esa manera reconoce el cuadrado como rectángulo de perímetro constante y área máxima, determina el paralelepípedo inscrito en una esfera de volumen máximo, etcétera. Por otra parte, la observación de sus cuadros de valores le permite afirmar que los toneles austríacos eran los más

convenientes, pues con el mismo material encerraban mayor volumen, y esboza la condición, ya señalada por Oresme, que en las proximidades de un máximo las variaciones de la cantidad se hacen insensibles, forma rudimentaria de expresar la actual condición de derivada nula en los puntos en que una función pasa por un máximo.

Se deben a Kepler otras consideraciones de índole infinitesimal: la caracterización de una curva a partir de una propiedad de sus tangentes; el valor aproximado de la longitud de la elipse como la de una circunferencia de diámetro semisuma de los ejes de la elipse; la aplicación del principio de continuidad, que supone que la parábola es un caso límite de la elipse o de la hipérbola, cuando uno de los focos (este término le pertenece) se aleja infinitamente, en cuyo caso el sistema de rayos focales se convierte en un haz de rayos paralelos.

Concepciones semejantes a las de Kepler y también vinculadas con la obra de Arquímedes, se encuentran en el jesuita Buonaventura Cavalieri, miembro del grupo de amigos y discípulos de Galileo. Cavalieri, que se ocupó de trigonometría y de aplicaciones de los logaritmos, a cuya difusión en Italia contribuyó en gran medida, es autor de un método de "integración" fundado en los "indivisibles", que ocupa un lugar intermedio entre las rigurosas demostraciones de Arquímedes y los métodos infinitesimales que surgirán en la segunda mitad del siglo. Sin definir el término, Cavalieri adopta los indivisibles de la filosofía escolástica, es decir entes de dimensión menor respecto del continuo del cual forman parte: los puntos son los indivisibles de las líneas; las líneas lo son de las figuras planas, etcétera. En verdad, Cavalieri no utiliza esta definición, ni ninguna otra, sino que para él los indivisibles son una manera de hablar para referirse a los elementos de dos figuras que compara y que, mediante cierta técnica algebraica, le permiten calcular áreas y volúmenes.

El método lo expone en *Geometría indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635, 2a. edición modificada, póstuma, 1653) aunque el método está mejor expuesto en *Exercitationes geometrica sex* (1647). Este último trabajo perseguía también una finalidad polémica, pues estaba dirigido a responder a las objeciones de Paul Guldin contra su método. En sus

Exercitationes, Cavalieri demuestra con su método los teoremas, que figuran en Pappus, relativos al área y al volumen de los cuerpos de rotación, conocidos hoy con el nombre de teoremas de Guldin, que éste no había demostrado sino mediante raciocinios metafísicos.

Sin recurrir al engorroso método de exhaución, Cavalieri logra dar en sus "integraciones" el resultado de la "integración" de las primeras tres potencias de la variable y cuando más tarde logra también la demostración para la cuarta potencia, extiende por analogía el resultado a una potencia de exponente natural cualquiera. Con estos resultados pudo resolver problemas de los antiguos, otros resueltos o propuestos por Kepler y también algunos nuevos. Entre sus contribuciones originales citemos la cuadratura de la espiral de Arquímedes, que reduce a la de la parábola, y la observación, que hubiera sin duda sorprendido a Arquímedes, de que el arco de la espiral estudiada por él era igual al arco de una determinada parábola. (3)

Del círculo científico de Galileo se ocuparon también de matemática Evangelista Torricelli y Vincenzo Viviani. Torricelli se ocupó de cuestiones infinitesimales en su *Opera geometrica* de 1644, donde, entre cuestiones relacionadas con las tangentes, cuadraturas y cubaturas, figura una interesante aplicación de los "indivisibles" que aportó además la novedad, en cierto modo paradójica para la época, de una figura infinita de volumen finito (4). Por otra parte, de las obras completas de Torricelli conocidas en este siglo se desprende que se ocupó de curvas nuevas, como las hoy llamadas "logarítmica" y "espiral logarítmica"; de la primera dio la cuadratura y la cubatura del sólido engendrado por rotación de la curva, y de la segunda la longitud del arco, resolviendo así el primer problema de rectificación.

El nombre de Viviani, geómetra que dio versiones y reconstrucciones de Euclides, Apolonio y Arísteo, está vinculado con un problema propuesto por él y llamado "enigma florentino": construir en una bóveda esférica dos ventanas iguales de manera que la porción restante de la semiesfera sea cuadrable. Viviani dio como solución las ventanas cuya proyección sobre el plano de la bóveda son circunferencias de diámetro igual al radio de la esfera;

en cuyo caso la porción restante del hemisferio es equivalente al cuadrado construido sobre el diámetro de la esfera.

Notable influencia sobre el desarrollo de los métodos infinitesimales ejerció el estudio de una curva que ocupó a casi todos los matemáticos de la primera mitad del siglo XVII. Se trata de la cicloide (el nombre es de Galileo), curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre una recta. El estudio de esta curva motivó polémicas, controversias y desafíos, en los que intervino Galileo y, además, Mersenne, Torricelli, Viviani, Roberval, Descartes, Pascal, Fermat, Huygens, Wren, Wallis,... Con tal motivo veamos las contribuciones de algunos de estos matemáticos a los métodos infinitesimales nacientes.

Giles Personne de Roberval se ocupó de numerosas cuestiones relacionadas con los métodos infinitesimales. Se le debe un método cinemático para construir las tangentes a todas las curvas planas conocidas en su época, a las que él añadió la actual sinusoide, que denominó "compañera" de la cicloide, considerando la curva descrita por un doble movimiento, cuya resultante, de acuerdo con la regla del paralelogramo, proporcionaba la dirección de la tangente. Se ocupó además de calcular áreas y volúmenes, así como rectificaciones y centros de gravedad, utilizando una concepción semejante a la de los indivisibles, aunque ya algo más próxima a la de los "infinitamente pequeños". (5)

Con métodos semejantes estudia Pascal numerosas propiedades de la cicloide, que llamó "roulette", propiedades que constituyeron el tema de un desafío lanzado públicamente por Pascal en 1658 a todos los matemáticos de la época.

En cuanto a Fermat, sus contribuciones al cálculo infinitesimal abarcan todas sus ramas y muestran su habilidad algorítmica. Fermat traduce algebraicamente la idea, ya esbozada por Oresme y por Kepler, relativa a la anulación de la variación de las cantidades en las proximidades de un máximo o un mínimo, y expone un método para la determinación de esos valores, que aplica a la determinación de las tangentes. Explotando con habilidad la suma de términos de una progresión geométrica, logra la cuadratura de las parábolas de orden superior o, lo que es lo mismo, la integración de las funciones de potencia, con excepción del exponente *-1*. También se ocupó de rectificaciones de curvas,

reduciendo en algunos casos ese problema al de las cuadraturas, lo que ponía de manifiesto la analogía entre ambos problemas. (6)

Mientras el estudio de estas cuestiones geométricas: tangente, rectificaciones, cuadraturas, cubaturas, centros de gravedad, etcétera, iban proporcionando elementos para los futuros algoritmos del cálculo diferencial e integral, hacían su aparición otros algoritmos infinitos.

La suma de la serie geométrica convergente, ya utilizada por Fermat en sus cuadraturas, aparece en una voluminosa obra del jesuita belga Gregorius Saint Vincent en la que, no obstante pretender con ella demostrar la cuadratura del círculo, figuran cosas interesantes. Al analizar los métodos de los antiguos introduce, no muy apropiadamente, el vocablo "exhaución", con el que designamos hoy el proceso de demostración inaugurado por Eudoxo. Saint Vincent insinúa además una noción de límite y vislumbra la relación entre los logaritmos y la cuadratura de la hipérbola.

Entre quienes se ocuparon en refutar las demostraciones de Saint Vincent figura uno de los grandes científicos del siglo: Christian Huygens, que además de su labor como físico y astrónomo realizó diversas investigaciones matemáticas, algunas en conexión con sus trabajos físicos, otras independientes. Entre estas últimas pueden mencionarse cuestiones de geometría elemental, relacionadas en especial con el problema de la cuadratura del círculo, que perfecciona los métodos conocidos para obtener valores aproximados de π o para rectificaciones aproximadas. También se le debe el primer tratado orgánico relativo al cálculo de probabilidades, fundado sobre la correspondencia de pascal y Fermat, el *Tractatus de ratiociniis in ludo aleae* de 1657. Se ocupó de curvas planas, algunas nuevas como la tractriz y la catenaria, mientras que en conexión con sus estudios mecánicos enriqueció el estudio de las curvas con la teoría de las evolutas y evolventes, que figura en su célebre *Horologium oscilatorium* de 1673, teoría con la que se abre un nuevo capítulo de la geometría diferencial, el relativo a la curvatura de las curvas planas. (7)

También se ocupó de series y de la cuadratura del círculo James Gregory, con quien aparece, probablemente por primera vez la

distinción entre series convergentes y divergentes. Estudia en especial las series de las funciones circulares inversas y es precisamente en la circunstancia de la imposibilidad de expresar mediante un número finito de términos algebraicos la relación entre el área de un sector circular y la de las poligonales inscritas o circunscritas, donde cree ver la imposibilidad de la cuadratura del círculo.

Las series fueron introducidas sistemáticamente en el análisis por John Wallis, uno de los matemáticos más originales del siglo, que cubrió en gran parte con su larga vida, pues murió casi nonagenario. Escribió sobre álgebra y sobre las cónicas, que consideró por primera vez como las curvas cuya ecuación en coordenadas cartesianas es de segundo grado. Se ocupó de la teoría de las paralelas y sustituyó la noción de equidistancia en la que casi todos los comentaristas y traductores de Euclides se apoyaban para justificar el quinto postulado, por la existencia de un triángulo semejante a un triángulo dado y de magnitud arbitraria. Wallis trató de justificar este postulado por analogía con el tercer postulado euclidiano, que admitía que por un punto cualquiera puede trazarse una circunferencia de radio arbitrario, aceptando que pudiera existir un triángulo semejante a otro tan grande como se quiera. Aunque no es tan simple ni tan intuitivo como el de Euclides, el postulado de Wallis es equivalente, y por tanto muestra la vinculación del quinto postulado con la teoría de la semejanza e inversamente, como se demostró más tarde, que en las geometrías no euclidianas no pueden subsistir triángulos semejantes, pues la magnitud de cada figura está indisolublemente ligada a la de sus ángulos.

La obra más importante de Wallis es su *Arithmetica ínfinítorum* de 1655. En ella aparece el actual símbolo de "infinito", que utiliza también para "la nada" (non-quanta) como recíproco $1:\infty$, así como también los exponentes fraccionarios e irracionales, interpretándose también correctamente los recíprocos de las potencias de exponente positivo como potencias de exponente negativo, aunque éstos no los escribe.

Un resultado fundamental, expuesto por Wallis mediante un método que es mezcla de inducción e interpolación, le permite expresar nuestra integral de la función x^m en el intervalo (0,1)

como $1/(m+1)$, para cualquier exponente. Este resultado correcto para $m=-1$, de acuerdo con la concepción de Wallis, no tiene sentido para $m<-1$, y en efecto la interpretación de Wallis no es correcta en este caso. Wallis extiende luego esta regla a toda suma o serie de potencias, de donde resultó una importante contribución al problema de la cuadratura del círculo. Al aplicar su regla a la expresión entera $(1-x^2)^n$ para valores sucesivos de n trató de obtener, por interpolación, el valor para $n=1/2$ al que correspondería como resultado ¼ π. Como no logró éxito fue modificando los valores del exponente n, al mismo tiempo que modificaba los de la potencia de x, y siguiendo ciertas leyes de generalización e interpolación llegó a un nuevo desarrollo de π en producto infinito en la forma

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3.3.5.5.7.7\ldots}{2.4.4.6.6.8\ldots}$$

No obstante este resultado original, Wallis no parece haber quedado satisfecho e indujo a su amigo, el primer presidente de la Royal Society, William Brouncker, a que investigara el asunto. Brouncker, que se ocupó también de otras cuestiones matemáticas, al proseguir el tema de Wallis dio, no se sabe cómo, con el siguiente notable desarrollo de π en fracción continua infinita que, por comodidad tipográfica, damos según la notación de Cataldi:

$$\frac{4}{\pi}=1+\frac{9}{2.}\&\frac{25}{2.}\&\ldots\&\frac{(2n+1)^2}{2.}\&\ldots$$

Otra consecuencia importante del método de las cuadraturas de Wallis fue el establecimiento de la serie logarítmica y, con ella, de la cuadratura del sector de hipérbola equilátera. En tal sentido el paso decisivo fue cumplido por Nicolaus Mercator, holandés de nacimiento cuyo apellido natal era Kaufmann, quien en su *Logarithmotechnía* de 1668 tuvo la feliz ocurrencia de dar la ecuación de la hipérbola equilátera en la forma $y=1/(1+x)$ que podía desarrollarse en serie de potencias y aplicarle la regla de Wallis. Combinada esa circunstancia con la observación, señalada por Saint Vincent, que a abscisas en progresión geométrica

correspondían sectores de hipérbola equilátera de área en progresión aritmética, resultó la serie logarítmica de la cual se ocuparon además Wallis, Brouncker, Gregory y Pietro Mengoli. Este último dio en 1650 la demostración, hoy corriente, de la divergencia de la serie armónica y demostró además suma habilidad en la suma de series deducidas de la serie logarítmica.

Agreguemos que las series oscilantes hacen su aparición a comienzos del siglo XVIII, en una carta de 1705 dirigida a Leibniz por Guido Grandi, mediante el clásico ejemplo de la serie

$$1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \text{ para } x = 1$$

Con el nombre de Isaac Barrow se cierra la lista de los precursores y predecesores de los dos grandes fundadores del cálculo infinitesimal, Newton y Leibniz. La importancia de Barrow en el advenimiento de los nuevos métodos es doble. Por un lado se le debe un método para la determinación de las tangentes a las curvas planas, (8) mediante el "triángulo característico", que no difiere del actual sino en la notación, con lo que en suma puede considerarse el fundador de la noción de derivada; por el otro, Barrow fue el maestro de Newton, a quien en 1669 cede su cátedra de Cambridge para dedicarse a la teología. Las frecuentes discusiones entre maestro y discípulo, la mutua colaboración, pues Newton revisó y corrigió una de las ediciones de una obra de Barrow, son hechos que sin duda contribuyeron a asignar importancia a la influencia de Barrow en el futuro del cálculo infinitesimal.

Notas complementarias

(1) Las series de A. Tomas. He aquí dos series, combinaciones lineales de series geométricas, cuyo resultado correcto calcula Tomas:

$$1 + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{19}{16} \cdot \frac{1}{8} + \cdots = \frac{5}{2}$$

$$1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{13}{12} \cdot \frac{1}{8} + \cdots = \frac{20}{9}$$

En cambio, esta serie, combinación de serie geométrica y logarítmica:

$$1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} + \cdots$$

no está en condiciones de calcularla sino aproximadamente. Probablemente por comparación con series geométricas dice que su suma está comprendida entre 2 y 4. El valor exacto es 2 + l.2 = 2,693...

(2) El "limón" de Kepler. Kepler llama limón al sólido de revolución obtenido haciendo girar un segmento circular, menor que un semicírculo, alrededor de su cuerda. Construye en cada punto A del segmento un triángulo rectángulo en A, de catetos la distancia AB igual a la semicuerda, y la normal AC al plano del segmento, de longitud la circunferencia rectificada de radio AB. El triángulo ABC es equivalente al círculo que describe el punto A en la rotación, de manera que el volumen buscado será el del sólido descrito por el triángulo. Ese sólido es una uña cilíndrica, que a su vez integra, con otros sólidos de volumen conocido, una uña cilíndrica mayor, del tipo estudiado por Arquímedes, y por tanto también de volumen conocido; de ahí que por diferencia obtenga el volumen del "limón".

(3) Los “indivisibles” de Cavalieri. Las "integraciones" de Cavalieri, con el lenguaje de los "indivisibles", siguen el siguiente razonamiento: Consideremos el paralelogramo $ABCD$ de base $AD = c$ y el triángulo ABC, e indiquemos con x los segmentos variables paralelos a la base c. En el lenguaje de los indivisibles n segmentos x llenan el triángulo, como n segmentos c llenan el paralelogramo, y

por ser el triángulo la mitad del paralelogramo resultará, con nuestro símbolos

$$\sum_{1}^{n} x = \frac{1}{2} nc.$$

De la misma manera, si se compara la pirámide de vértice A y base el cuadrado de lado *BC*, con el prisma de igual base y altura de volumen triple del de la pirámide

$$\sum_{1}^{n} x^2 = \frac{1}{3} nc^2.$$

Para los exponentes 3 y 4 Cavalieri acude al álgebra. Biseca el paralelogramo mediante la paralela *MN* a *AB* y llama y y z los segmentos paralelos a la base de los triángulos *ACD* y *ONC*, siendo *O* el centro del paralelogramo.
Será entonces $x = 1/2\,c + z$ e $y = 1/2\,c - z$. Ahora, dice Cavalieri, los n indivisibles del triángulo *ABC* pueden descomponerse por mitades en los triángulos *ABC* y *ADC* de donde

$$\sum_{1}^{n} x^3 = \sum_{1}^{1/2n} (x^3 + y^3) = \sum_{1}^{1/2n} \left[\left(\frac{1}{2} c + z \right)^3 + \left(\frac{1}{2} c - z \right)^3 \right] =$$

$$\sum_{1}^{1/2n} 2 \left[\left(\frac{1}{2} c \right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} cz^2 \right] = 2 \cdot \frac{1}{8} c^3 \cdot \frac{1}{2} n + 3c \sum_{1}^{1/2n} z^2$$

Como los triángulos *NOC* y *ABC* son semejantes y de lados mitades, los $1/2n$ indivisibles iguales a z^2 equivalen a la mitad de los n indivisibles iguales a $(1/2x)^2$ y en definitiva, teniendo en cuenta el resultado para el exponente 2:

$$\sum_{1}^{n} x^3 = \frac{1}{8} nc^3 + 3c \cdot \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} \left(\frac{1}{2} x \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{8}nc^3 + 3c \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}c\right)^2 \cdot \frac{n}{3} = \frac{nc^3}{4}.$$

En forma semejante demuestra Cavalieri

$$\sum_1^n x^4 = \frac{nc^4}{5}$$

Admitiendo entonces, en general

$$\sum_1^n x^p = \frac{nc^p}{p+1}$$

Que, en el lenguaje de los divisibles, expresa que la suma de los n indivisibles de x^p, cuando x va de 0 a c, es a la suma de n indivisibles iguales a c^p como 1 es a $p + 1$. Si se multiplica la igualdad de Cavalieri por el incremento c/n en ambos miembros y se pasa al límite para $n \to \infty$, se llega a nuestra integral definida

$$\int_0^c u^p du = \frac{c^{p+1}}{p+1}$$

(4) Lo indivisible, en Torricelli.

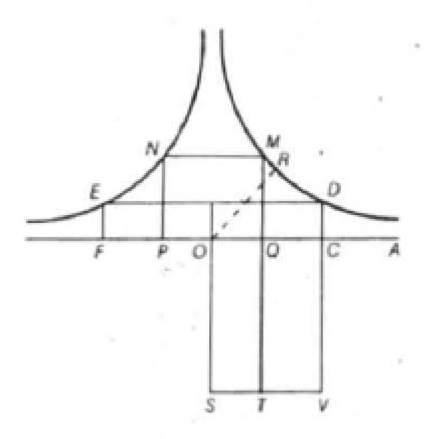


Fig. 32

Por el método de los indivisibles Torricelli demuestra que si OA y OB son las asíntotas de la hipérbola equilátera MD, el sólido infinito que se obtiene haciendo girar el segmento DC y la rama infinita DM alrededor de la asíntota OB, es equivalente al cilindro de altura OC y

de base el círculo de diámetro OS, doble de la distancia OR del centro O a la hipérbola. Para eso considera como "indivisibles" del sólido las superficies, laterales de los cilindros de altura MQ y base el círculo de radio OQ y como "indivisible," del cilindro de altura OC los círculos paralelos a la base de diámetro QT. Es fácil comprobar que ambas figuras, el cilindro y el círculo, son equivalentes pues de la propiedad de la hipérbola se deduce $2OQ \cdot OM = OR^2 = \frac{1}{4}QT^2$.

(5) Los indivisibles en Roberval. Consideremos, como ejemplo, el método empleado por Roberval para determinar el área de la cicloide y el volumen del sólido engendrado por su rotación, mostrando al mismo tiempo el eficaz empleo en este ejemplo de la "compañera" de la cicloide, es decir de la sinusoide. Sea AMC una semicicloide engendrada por el punto A del círculo generador de diámetro d. Trazando por M la paralela a la base, el punto P donde corta al diámetro normal a la base del círculo móvil dibuja la sinusoide APC. Si x es el ángulo central de los arcos $AN = MS$ será $RN = MP = ½\ d\ sen\ x$. De ahí, utilizando los indivisibles, Roberval concluye que el área $AMCPA$, comprendida entre la cicloide y la sinusoide, es el área del semicírculo generador y que el volumen engendrado por la rotación de $AMCPA$ será igual al engendrado por la rotación del semicírculo generador.

Por la simetría de la sinusoide, ésta divide al rectángulo $ABCD$ en dos partes iguales y por tanto la figura $APCD$ será equivalente al semirrectángulo o, lo que es lo mismo, al círculo generador, de ahí que el área encerrada por la semicicloide $AMCD$ es equivalente a tres semicírculos generadores.

Para determinar el volumen del sólido engendrado por la sinusoide tendremos, llamado $SP = y$; $PT = z$, que

$$nd^2 = \sum_1^n d^2 = \sum_1^n (y^2 + z^2) = \sum_1^n y^2 + 2\sum_1^n yz + \sum_1^n z^2 =$$
$$= 2\sum_1^n y^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} d^2 \sum_1^n (\sin x)^2$$

Pero como x varía de 0 a π, la suma de los indivisibles de $(\sin x)^2$ será

$$\sum_{1}^{n}(\sin x)^2 = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}(\sin x)^2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}(\cos x)^2 = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} 1 = \frac{1}{2}n$$

; y, en definitiva,

$$nd^2 = 2\sum_{1}^{n} y^2 + \frac{1}{4}nd^2 \quad ; \quad \sum_{1}^{n} y^2 = \frac{3}{8}nd^2$$

, es decir que el volumen engendrado por la sinusoide es los $^3/_8$ del volumen del cilindro engendrado por la rotación del rectángulo *ABCD*, y como el volumen engendrado por la figura *AMCPA* era $^1/_2$ de ese cilindro, en definitiva el volumen engendrado por la cicloide, al girar alrededor de su base, es los $^5/_8$ del volumen engendrado por su rectángulo circunscrito, que es el resultado que da Roberval.

(6) Las contribuciones infinitesimales de Fermat. Empecemos por considerar el "método de máximos y mínimos" de Fermat, quien traduce algebraicamente la observación de anularse, en las proximidades de esos valores, la variación de la función. Aplicándolo a un ejemplo simple, consideremos el problema de determinar entre todos los rectángulos isoperímetros el de área máxima. Si $2a$ es el perímetro y x el lado del rectángulo buscado, deberá hacerse máximo el producto $x(a-x)$. De acuerdo con la propiedad mencionada la diferencia entre ese producto y su valor en las proximidades del máximo tendrá que anularse, de ahí que para el valor próximo $x+e$ será $x(a-x)-(x+e)(a-x-e) = e(2x-a+e)$. Dividiendo por e y luego anulando e, se obtiene $x = 1/2a$, resultado correcto pues el cuadrado es el rectángulo isoperímetro de mayor área.

Fermat utiliza este método en la determinación de las tangentes a las curvas planas, concibiéndolas como las rectas que, entre todas las secantes que pasan por un punto fijo del eje, determinan el máximo o el mínimo coeficiente angular, es decir el cociente *y:z*, siendo *z* el segmento que hoy llamamos subtangente.

Sea, por ejemplo, determinar la tangente a la parábola $y = \frac{x^2}{a}$. De acuerdo con la regla de Fermat se tendrá:

$$\frac{(x+e)^2}{z+e} - \frac{x^2}{z} = \frac{e(2zx+ze-x^2)}{z(z+e)}$$

Por tanto $x(2z-x)=0$ y $z=1/2x$, que es precisamente la subtangente de la parábola.

Como ejemplo de una cuadratura de Fermat, sea calcular el área de la figura comprendida entre el eje de las $a^{m-n}y^n = x^m$ (con $m > n$, naturales), y la ordenada en el extremo de coordenadas *x, y*. Fermat divide el intervalo en puntos de abscisa *x*, tales que $x_r = xq^r$ (con $q < 1$) y comprueba ante todo que $\frac{y}{y_n} = \frac{x}{x_m}$.

Asimilando ahora los trapezoides de bases $(x, x_n)(x_n, x_{2n})$… rectángulos de igual base y de altura las ordenadas y, y_n… sus áreas S_n, S_{2n},… están en progresión geométrica. En efecto,

$$\frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{(x-x_n)y}{(x_n-x_{2n})y_n} = \frac{(x-x_n)x}{(x_n-x_{2n})x_m} = \frac{1}{q^n}\cdot\frac{1}{q^m} = \frac{1}{q^{n+m}}$$

y por tanto el área total, sumando la serie geométrica convergente, es

$$S = \frac{S_n}{1-q^{n+m}} = \frac{x-x_n}{x-x_{n+m}}\cdot xy = \frac{x-x_n}{x-x_{n+m}}S_0$$

siendo S_0 el área del rectángulo de los lados *x* e *y*. Finalmente, admitiendo que todos los rectangulitos son iguales, Fermat llega al resultado exacto

$$S = \frac{nS_0}{n+m}$$

(7) La determinación del radio de curvatura por Huygens. La demostración de Huygens es puramente geométrica. Parte de la curva suponiendo dos puntos de ella *A* y *B* próximos y considera la tangente *TA* en *A* y las normales *AM* y *BN* en esos puntos, cuya intersección *C* será el centro de curvatura y la distancia *AC* el radio de curvatura, que determina partiendo de los triángulos semejantes *AN'C* y *MNC* y los *ABN'* y *TBN*, utilizando por último una

curva auxiliar de puntos próximos A_0B_0 cuyas ordenadas son las subnormales de A y B y en la que considera tangente T_1A_0. He aquí resumida su demostración:

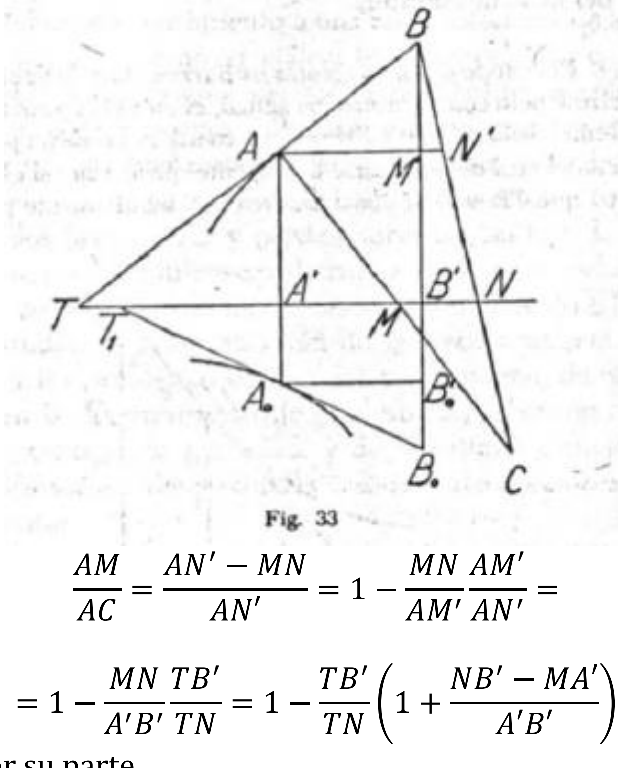


Fig. 33

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AN' - MN}{AN'} = 1 - \frac{MN}{AM'}\frac{AM'}{AN'} =$$

$$= 1 - \frac{MN}{A'B'}\frac{TB'}{TN} = 1 - \frac{TB'}{TN}\left(1 + \frac{NB' - MA'}{A'B'}\right)$$

Y como, por su parte,

$$\frac{NB' - MA'}{A'B'} = \frac{B'B_0 - A'B_0}{A_0{B_0}'} = \frac{B_0{B_0}'}{A_0{B_0}'} = \frac{B_0B'}{T_1B'}$$

Se llega a

$$\frac{AM}{AC} = 1 - \frac{TB'}{TN}\left(1 + \frac{B_0B'}{T_1B'}\right)$$

de donde se deduce AC en función de datos conocidos, pues AM es la longitud de la normal, TB' es la subtangente, TN es la suma de la subtangente y subnormal; B_0B' es la subnormal y T_1B' es la subtangente de la curva cuyas ordenadas son las subnormales (el cociente $B_0B' \colon T_1B'$ resulta ser la derivada de la subnormal). Si se sustituyen en la fórmula última los valores de esos segmentos por sus expresiones actuales se obtiene, como puede comprobarse, la expresión actual, en valor absoluto, del radio de curvatura.

(8) El método de las tangentes de Barrow. Con la figura y notación de Barrow pero con terminología actual, el método aparece descrito en esta forma. Sean *AP = p* y *PM = m* las coordenadas de un punto *M* de la curva en el cual debe trazarse la tangente que cortará al eje en el punto *T* tal que *TP = t*. Se toma un arco *MN* infinitamente pequeño (in-definite paroum), se traza la paralela *NR = e*, que forma con *RM = a* un triángulo *RNM*, que más tarde se llamó "triángulo característico".

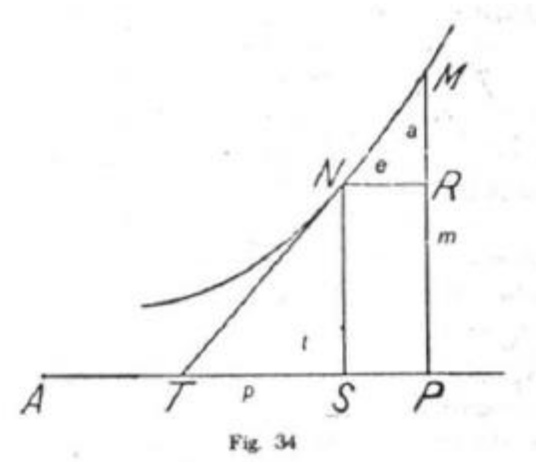


Fig. 34

Se calculan de acuerdo con la ecuación de la curva los valores de *a* y de *e* observando las reglas siguientes: en virtud de la ecuación quedan eliminados todos los términos que no contienen *a* o *e*; se suprimen todos los términos de grado superior de *a* y de *e* porque esos términos "nihil valebunt" y se deduce la razón *a : e* que es igual a *m : t*, de donde se despeja *t*, nuestra subtangente. Resulta evidente que en estos cocientes *a : e* o *m : t* está implícita la actual derivada como pendiente de la tangente a la curva.

Claro es que por el método de Barrow se obtiene *t* en función de ambas coordenadas. Así si la ecuación es (el ejemplo es de Barrow): $p^2(p^2+m^2)=h^2m^2$, Barrow obtiene $t=m^2(h^2-p^2){:}\,p(2p^2+m^2)$ mientras que nuestra subtangente seria $t=p(h^2-p^2){:}\,(2h^2-p^2)$.

El cálculo infinitesimal: Los fundadores

La obra de los precursores y predecesores de Newton y de Leibniz preparó y allanó el camino para que ellos lograran, con su propia labor, dar nacimiento a una rama autónoma de la matemática, que hoy llamamos análisis infinitesimal pero que durante mucho tiempo siguió siendo en realidad un cálculo, un conjunto de reglas de gran utilidad y eficacia, puestas en evidencia por sus notables éxitos en las aplicaciones, pero desde el punto de vista matemático no mucho más que eso.

Aquellos precursores y predecesores habían tratado y resuelto numerosos problemas relativos a los tres capítulos que más tarde constituirían la nueva disciplina: de cálculo diferencial, al estudiar la determinación de las rectas tangentes, la curvatura y los problemas de máximo y de mínimo; de cálculo integral, en la determinación de cuadraturas, cubaturas, rectificaciones, centros de gravedad; y de algoritmos infinitos, al ocuparse de series, de productos infinitos, de fracciones continuas infinitas.

Pero fuera de algunos atisbos, faltó en ellos todo nexo que vinculara esos problemas aparentemente independientes; faltó en esos métodos todo carácter riguroso, carentes como estuvieron de toda demostración entendida en el sentido lógico, tal como se presentaba en los métodos de los antiguos. Esos métodos yacían bajo casos particulares, o cuya generalidad no se demostraba, y en ellos se mezclaban consideraciones geométricas con desarrollos algebraicos.

Esta evolución empírica será en parte superada por la obra de Newton y de Leibniz, pero debe reconocerse que si esa obra dio nacimiento al cálculo infinitesimal no fue sino una etapa, sin duda muy importante, en el desarrollo del análisis infinitesimal.

La labor matemática de Isaac Newton, íntimamente vinculada con sus investigaciones de filosofía natural, no se limitó a cuestiones infinitesimales, sino que abarca amplias zonas del álgebra y de la geometría. Así, en sus célebres *Principia* de 1687, dedica un par de secciones del primer libro a estudiar propiedades de las cónicas, en forma geométrica.

Aparece la solución geométrica del "problema de las cuatro rectas", a la que agrega la construcción de las tangentes del lugar y del foco de la cónica, mientras que, con evidente alusión a quienes seguían la tendencia cartesiana, dice que esos problemas "no los ha resuelto mediante un cálculo analítico, sino por una construcción geométrica tal como lo requerían los antiguos". Aparecen también teoremas de construcción de cónicas cuando se dan cinco elementos entre puntos y tangentes u otras condiciones.

Se debe a Newton la iniciación de la teoría de las curvas algebraicas (curvas cuya ecuación en coordenadas cartesianas es de naturaleza algebraica) con *Enumeratio linearum tertii ordinis*, escrito terminado en 1695 pero aparecido en 1704 como apéndice de la *Óptica*. En ese tratado, después de haber demostrado algunas propiedades generales de las curvas algebraicas, se ocupa en particular de las cúbicas, estudia su generación y clasificación (dio 72 "especies" diferentes) y demuestra, entre otras propiedades, que a semejanza de las cónicas las cúbicas pueden obtenerse por proyección de una cúbica especial y ulterior sección plana del cono.

Aplica las cúbicas para resolver ecuaciones, tema al que dedica en gran parte su *Arithmetica universalis*, resumen de sus lecciones dictadas en Cambridge entre 1673 y 1683, publicado por su sucesor en la cátedra en 1707. No obstante su título, la *Arithmetica universalis* es un tratado de álgebra, que generaliza y mejora los conocimientos de la época relativos a la teoría general de las ecuaciones, la eliminación algebraica y la resolución por el álgebra de problemas geométricos. Habla de raíces afirmativas (positivas), negativas e imposibles (imaginarias), se ocupa de raíces múltiples y extiende, sin demostrarla, la regla de los signos de Descartes a las raíces imaginarias. Enuncia una regla para encontrar, cuando existen, factores lineales en las ecuaciones; deduce, de las relaciones entre los coeficientes y la suma de las potencias de igual exponente de las raíces, reglas para obtener límites de las raíces reales; introduce nuevos métodos para resolver gráficamente las ecuaciones mediante la intersección de curvas de fácil trazado, por ejemplo, la concoide. Con el nombre de "método de Newton" se conoce hoy un método numérico de aproximación de las raíces, que apareció por primera vez en el *Algebra* de Wallis de 1685, aunque figura en obras de Newton anteriores. (1)

Una de estas obras es *De Analysi per Aequationes numero terminorum infinitas,* terminada en 1669 pero no publicada hasta 1711, aunque su contenido era conocido mediante la correspondencia científica (parte de ese escrito fue remitido por carta del mismo Newton a Leibniz en 1676), aparte de que también aparece en el *Tractatus de quadratura curvarum*, publicado como apéndice de la *Óptica* de 1704.

En *De Analysi* aparece el teorema general del binomio, al cual llega partiendo de los resultados obtenidos por Wallis que generaliza para exponentes racionales. En los casos de la raíz cuadrada sustituye la inducción de Wallis por la comprobación directa del resultado, elevándolo al cuadrado, o por extracción de la raíz "*more arithmetico*". Obtiene otras series por división, procedimiento ya conocido, mientras que aplica por primera vez el método de inversión para obtener nuevas series. Así nacen la serie exponencial de la logarítmica, la de las funciones circulares seno y coseno partiendo de las ciclométricas, etcétera. También desarrolla en serie funciones dadas implícitamente, utilizando una regla denominada del "paralelogramo de Newton".

Aunque se encuentran en Newton algunas alusiones a la convergencia de las series, en realidad este algoritmo no es estudiado en sí, sino como recurso para la determinación de rectificaciones y cuadraturas, desarrollando en serie la ordenada. Un caso interesante es la cuadratura de las diferenciales binomias de hoy, que expresa mediante una serie cuyos coeficientes, como en el caso de la fórmula del binomio, están dados de manera recurrente (2). También como recurso para efectuar cuadraturas, aparece en *Methodus differentialis* de 1712 la hoy llamada “fórmula de interpolación de Newton”, que permite determinar la ecuación de una parábola de orden superior que pasa por n puntos prefijados de abscisas en progresión aritmética y que constituye el punto de partida de la teoría de las diferencias finitas.

En *De Analysi* la cuadratura de las potencias se realiza de acuerdo con la regla general del exponente dada por Wallis pero la novedad reside en que parte del resultado y, al aplicar el método de Barrow para la determinación de la tangente, vuelve a aparecer la potencia, con lo cual queda desatado el nudo gordiano del nuevo

cálculo, es decir el carácter inverso de los problemas de la tangente y de la cuadratura. (3)

Cuando en el desarrollo en serie aparecía la potencia de exponente *-1*, para el cual la regla del exponente no era válida, Newton separa el término, indicando que se trata de un sector hiperbólico.

Pero la contribución más original de Newton a los métodos infinitesimales es su "método de las fluxiones", que constituyó el tema de un tratado especial de 1671, que no se publicó, traducido, hasta 1736. Del carácter general del método ya da cuenta Newton en una carta de 1672 al decir que puede aplicarse "no sólo al trazado, de tangentes a cualquier curva, sea geométrica o mecánica… Sino también para resolver cualquier clase de problemas sobre curvaturas, áreas, longitudes, centros de gravedad, etcétera" y agrega que ha "entrelazado ese método con aquel otro método que consiste en trabajar con las ecuaciones reduciéndolas a series infinitas". En efecto, el método de las fluxiones de Newton, con su esencia y notación propias no es sino una forma de tratar los problemas del actual análisis infinitesimal. El método es de naturaleza geométrico-mecánica pues supone que todas las magnitudes geométricas son engendradas por movimientos de velocidades diferentes, mientras el tiempo fluye constante y uniformemente, de ahí que el tiempo, que actúa como telón de fondo, no aparezca explícita sino implícitamente en las velocidades, en las velocidades de las velocidades, etcétera. Las magnitudes engendradas son las "fluentes", las velocidades de éstas son las "fluxiones", el incremento del tiempo es designado por una o y el producto de este incremento por la respectiva fluxión, que Newton denomina "momento", sustituye nuestra diferencial. La notación característica de Newton para las fluxiones, mantenida durante cierto tiempo por sus sucesores y utilizada actualmente en mecánica, consiste en indicar las sucesivas fluxiones mediante puntos superpuestos a la fluente correspondiente; así, la fluxión de y (nuestra derivada) se indica $\dot{y}$.

El primer problema que resuelve Newton con su método es el de determinar la relación entre las fluxiones conociendo la relación entre las fluentes. Si esta relación es entera, el procedimiento es el actual: se sustituye cada fluente por la fluente más el momento, se

simplifica y en el resultado se anula el incremento, obteniéndose la relación buscada. Cuando la relación de las fluentes no es entera, Newton introduce variables auxiliares para convertirla en entera. (4)

Tomando en cuenta las objeciones que había provocado la anulación de los incrementos, Newton introdujo en el *Tractatus* la expresión "razón de los incrementos evanescentes", es decir la razón entre los incrementos correspondientes que, después de "evanescer" la fluxión aparecía como resultado de la razón en esas condiciones, asomando así, en forma aún rudimentaria, la idea del límite. (5)

Con su método de las fluxiones Newton resuelve los siguientes problemas geométricos: trazado de tangentes, mediante la subtangente; máximos y mínimos, anulando la fluxión; determinación de los puntos de inflexión, como máximos o mínimos del coeficiente angular de la tangente; determinación del centro y radio de curvatura. (6)

Pasa luego al problema inverso, del cual distingue tres tipos:

a) Determinar la fluente, dadas dos fluxiones y una sola fluente. Corresponde a nuestras cuadraturas, que en general Newton resuelve por el desarrollo en serie.
b) Determinar la relación entre las fluentes, dadas dos fluxiones y dos fluentes. Corresponde a un tipo de nuestras ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que Newton resuelve por desarrollos en serie utilizando, si es necesario, el método de los coeficientes indeterminados. (7)
c) Determinar la relación entre las fluxiones, cuando se dan varias fluxiones y fluentes. Corresponde a nuestras ecuaciones con derivadas parciales que Newton resuelve considerando integrales particulares, sin desconocer el hecho de la presencia de funciones arbitrarias.

Mientras en Inglaterra, por obra especial de Newton, el cálculo infinitesimal lograba nuevos resultados y adquiría las primeras notas que le conferían unidad y autonomía, en el continente, ahora por obra especial de Gottfried Wilhelm Leibniz, tal unidad y autonomía se acentuaban. Si la obra matemática de Newton fue la de un "filósofo natural", la de Leibniz fue la de un filósofo" y de un "algorítmico", Su preocupación por la claridad de los conceptos y

por el aspecto formal de la matemática le permitieron, entre otras innovaciones, crear el simbolismo adecuado al nuevo algoritmo. Además de sus contribuciones al cálculo infinitesimal, la labor matemática de Leibniz se extendió a la teoría de números, al cálculo mecánico (perfeccionó la máquina de calcular de Pascal), al álgebra (eliminación, potencia de polinomios, etcétera), al perfeccionamiento de la notación y del simbolismo, mientras que se le considera iniciador del cálculo geométrico, de la teoría de los determinantes, de la lógica matemática, de la topología.

Como promotor científico se le debe la fundación de las *Acta Eruditorum* en 1682, siguiendo las huellas del *Journal du Savants* (1665) y de los *Philosophical Transactions* (1665), y la creación de la Academia de Berlín en 1700, al principio como Sociedad Científica; iniciativas semejantes le deben las Academias de San Petersburgo, Dresden y Viena.

En el estudio de las series Leibniz dedujo por procedimientos originales varias de ellas, obtuvo nuevas (8) y dio, además, el criterio de convergencia de las series alternadas. Para el desarrollo en serie de la función seno, por ejemplo, se valió del método de los coeficientes indeterminados, partiendo de la ecuación diferencial de segundo orden que define esa función obtenida geométricamente.

Las consideraciones infinitesimales de Leibniz, que se encuentran ya en manuscritos de 1673, parten de la consideración del "triángulo característico" (el nombre es suyo) que ya había considerado Barrow pero que Leibniz dice que tomó de Pascal que "como un relámpago" le iluminó toda la cuestión. Mediante consideraciones sobre ese triángulo y sus semejantes, el de la ordenada y subtangente, o el de la ordenada y subnormal reconoció que los problemas de la tangente y de la cuadratura son inversos. En efecto, ese triángulo muestra que en el problema de la tangente interviene el incremento, es decir la "diferencia" de las ordenadas, mientras que en el problema de la cuadratura interviene la "suma" de las ordenadas, aspecto puramente formal de la cuestión que revela que ambos problemas son inversos, como lo son en aritmética la diferencia y la suma.

En cuanto al simbolismo, al principio indicó las sumas mediante la abreviatura Omn. (de *Omnia* = todo), que luego sustituyó por el

actual signo de integral, proveniente de la deformación de la letra alemana S inicial de suma, llegando a escribir $\int y = 1/2y^2$. Como la operación simbolizada así aumentaba en uno el número de las dimensiones, supuso que la operación inversa (la diferencial, que simbolizó con d) debía disminuir a toda expresión también en una unidad, de ahí que al principio escribió el símbolo d como denominador, aunque más tarde le dio la forma y el uso actuales.

Aunque desde 1676 está en posesión de las reglas y fórmulas más simples del cálculo infinitesimal, la primera publicación de Leibniz sobre estos temas es de 1684 y se refiere al cálculo diferencial. Es una memoria de apenas seis páginas Y en ella aparecen definidas las diferenciales en la forma actual: "Designamos con dx un segmento arbitrario y designamos con dy un segmento que es a dx como la ordenada y, de la cual dy es la diferencia, es a la subtangente". Aparecen las reglas comunes de diferenciación de las expresiones racionales e irracionales. Y se muestra, con un ejemplo complicado, cómo pueden obtenerse directamente las diferencias de expresiones fraccionadas y con radicales. Aplica la diferenciación a la resolución de los problemas de máximos y mínimos, que distingue según el signo de la segunda diferencial (different differentiarum), cuya interpretación geométrica es la concavidad o convexidad, que al anularse se pasa de un tipo de curvatura a otro por el “puntum flexus contrarii". Como ejemplo de mínimo da la ley de la refracción y como ejemplo de construcción de tangentes utiliza la curva lugar de los puntos cuya suma de las distancias a distintos puntos es constante. Termina dando la solución de uno de los problemas propuestos por Florimond de Beaune, que fue el primero en definir curvas mediante las propiedades de su tangente, dando lugar así a la determinación de curvas por el llamado método inverso de la tangente. El problema que aquí resuelve Leibniz es el de encontrar la curva cuya subtangente es constante, en que los incrementos son proporcionales a la ordenada. (9)

En 1686 aparecen los primeros escritos de Leibniz relativos al cálculo integral y aparece también impreso por primera vez el signo integral. Esos escritos muestran, por ejemplo, cómo con ese signo pueden definirse, mediante expresiones algebraicas, curvas que no lo son, por ejemplo, la cicloide. El vocablo “trascendente”

para las ecuaciones en las que la incógnita figura en el exponente, se debe a Leibniz.

A 1695 pertenecen consideraciones para refutar objeciones que les habían presentado, a raíz de lo cual da, entre otros ejemplos, la diferenciación de funciones de la forma u^v mediante el recurso de los logaritmos, tal como se hace actualmente. Del mismo año es el teorema que lleva su nombre, acerca de la regla para las diferenciales sucesivas de un producto de funciones, sin más que cambiar en la fórmula del binomio los exponentes por órdenes de diferenciación. Parece que trató de extender la regla a exponentes negativos (integración) y hasta a exponentes fraccionarios.

En otros trabajos se ocupó del círculo osculador, de la teoría de las envolventes (de la cual es iniciador), de las coordenadas curvilíneas y de la descomposición de las funciones racionales en sumas de fracciones parciales simples; de las series oscilantes, del ángulo de contingencia y, en general, de todos los problemas de índole geométrico-mecánica que interesaban a los matemáticos de la época.

La circunstancia, que hoy nos parece natural, de que en la segunda mitad del siglo XVII los tiempos estaban maduros para que surgiera el cálculo infinitesimal y el hecho, también natural, de que éste naciera por obra de dos matemáticos insignes, provocó entonces una lamentable cuestión, que se inició con una pretensión de prioridad para convertirse luego en una acusación de plagio, polémica que enturbió las relaciones entre los matemáticos ingleses y los continentales durante más de un siglo.

Aunque la polémica estallo hacia fines de siglo, estaba latente desde unos lustros antes, cuando se establece, mediante Oldenburg, una correspondencia en la que Leibniz informa a Newton de sus resultados, mientras que Newton da cuenta a Leibniz de su método de las fluxiones mediante un anagrama nada fácil de descifrar. La cuestión pudo haber terminado con honor para ambos en 1687 cuando Newton, en los *Principia*, cita al "eminente matemático C. W. Leibniz", revela su anagrama (que no era sino un enunciado) y agrega que el método de Leibniz "no difiere del mío sino en las palabras y en la notación". No deja de ser sintomático que en la correspondencia de diez años antes Leibniz, al referirse al trabajo de Newton, había escrito: "Es realmente de

admirar la variedad de caminos por los cuales puede llegarse al mismo resultado".

Pero en 1689 Leibniz. En un trabajo de mecánica, al referirse a cuestiones infinitesimales no cita a Newton, cuyas investigaciones sobre el tema, aunque todavía no hubiera publicado nada al respecto, eran conocidas, sobre todo por Leibniz mismo. Es posible que se deba a esta omisión que en el *Álgebra* de Wallis de 1695 aparezcan fragmentos de un escrito de Newton, aún inédito, sobre temas infinitesimales.

La cuestión se agrava en 1699 cuando un matemático suizo emprende un ataque contra Leibniz, alegando en favor de Newton la prioridad en el "invento" del nuevo cálculo ante el cual Leibniz reacciona y la cuestión parece concluir. Pero, al aparecer en 1704 la *Óptica* de Newton, en cuyo apéndice éste agrega un antiguo escrito matemático con el único objeto de afirmar su prioridad, la polémica enardece y los matemáticos ingleses acusan directamente a Leibniz de plagio.

En 1711 la Royal Society presidida entonces por Newton, toma cartas en el asunto y nombra una Comisión cuyo informe sostenía que Newton había sido el "primer inventor del nuevo cálculo". Ni este informe, ni la publicación en 1714 de un *Commercium epistolicum* con la correspondencia clave del asunto, ni siquiera la muerte de los actores principales dio fin a esta desagradable polémica, de la cual ni los dos grandes protagonistas salieron bien parados.

A tres siglos de distancia y aun reconociendo que en aquellos tiempos las cuestiones de prioridad se trataban con ardor desusado, esa controversia nos parece privada de fundamento, no sólo porque era natural que las nociones del nuevo cálculo, que estaban entonces en el aire, surgieran de mentes inteligentes, y Newton y Leibniz las tenían de sobra, sino también porque de ninguna manera se podía hablar de "primeros inventores", ya que ambos matemáticos habían erigido su edificio con materiales ajenos, acumulados por una pléyade de matemáticos que desde la antigüedad, pero en especial en la primera mitad del siglo XVII, se habían ocupado del tema. Es posible, también, que los contemporáneos de Newton y de Leibniz no advirtieran algo que hoy nos resulta claro: la diversidad de métodos y de notación con

que ambos matemáticos expusieron sus respectivas investigaciones, no era sino el resultado de sus distintas modalidades intelectuales, la de Newton como filósofo natural, físico y mecánico, la de Leibniz como filósofo, metafísico y lógico y que las diferentes notaciones resultaron fieles reflejos de las respectivas modalidades.

La consecuencia más lamentable de la polémica fue el aislamiento de cada bando y la falta de cooperación científica resultante de ese aislamiento, y aunque en definitiva los métodos no diferían sino en la notación, tal diferencia impedía que los progresos de un bando fueran conocidos y asimilados por el bando contrario. En esta situación eran los ingleses quienes llevaban las de perder, por las ventajas de la notación de Leibniz, fruto de una mente simbólica, frente a la de Newton, creación de una mente más empírica. De ahí que deba verse el fin de tan lamentable polémica en el gesto de un grupo de novenes matemáticos ingleses, John F.W. Herschel, Charles Babbage y George Peacock, al crear a comienzos del siglo pasado (1813) la "Analytical Society", que resuelve adoptar la notación de los matemáticos del continente o, como decían humorísticamente uno de ellos, para imponer los principios puros D-ismo (para aludir a la notación diferencial) frente a la dot-age, es decir a la "edad del punto" (para aludir a la notación newtoniana), pero haciendo al mismo tiempo un juego de palabras intraducibles (dotage = chochera).

Notas complementarias

(1) El método de aproximación de Newton. Newton expuso el método con un solo ejemplo, que expone de la forma siguiente, algo abreviada: Sea resolver $y^3 - 2y - 5 = 0$, y sea 2 un valor que difiere de la raíz en menos de 0,1. Si se hace $y = 2 + p$ se llega a $p^3 + 60p^2 + 10p - 1 = 0$. Si se eliminan los dos primeros términos, por ser pequeños, se llega a $10p - 1 = 0$, de donde p = 0,1. Si entonces, nuevamente, se hace $p = 0{,}1 + q$ se llega a $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$ y, como antes, eliminando los dos primeros

términos resulta $q = -0{,}0054$. Si ahora $q = -0{,}0054 + r$ y se sustituye, despreocupándonos del término en q^3, se obtiene $6{,}3r^2 + 11{,}16196r + 0{,}000541708 = 0$ y, despreciando $6{,}3r^2$, resulta $r = -0{,}00004853$ y, en definitiva $y = 2{,}09455147$, valor exacto hasta la séptima decimal.

Un contemporáneo de Newton, Joseph Raphson, publicó en 1690 un tratado en el cual, sin mencionar a Newton, mejora el método al operar siempre con la ecuación inicial. Así, en el ejemplo de Newton, después de haber obtenido $p = 0{,}1$, habría sustituido $y = 2{,}1 + q$ obteniendo $q = -0{,}0054$, sustituyendo entonces $y = 2{,}0946 + r$, etcétera.

En ente método, que consiste en partir de un valor aproximado a, sustituir $y = a + p$ y suprimir en la ecuación trasformada las potencias superiores a la primera, se efectúa una aproximación lineal que geométricamente significa sustituir la gráfica de la ecuación por la recta tangente en el punto de la abscisa a. Con esta interpretación geométrica el método se extiende a ecuaciones algebraicas o trascendentes, en el cual introdujo Fourier, en 1818, un perfeccionamiento importante que, de no seguirse, se corre el riesgo de que las aproximaciones que ofrece el método resulten más groseras que aquellas de las que se ha partido. Es curioso señalar que Newton, en su ejemplo, contraria la regla de Fourier, aunque por el ejemplo elegido la segunda aproximación $y = 2{,}1$ cumple con esa regla.

(2) La diferencial binomia y el binomio de Newton. La generalización para exponentes cualesquiera de la conocida fórmula del desarrollo de la potencia de un binomio para exponentes naturales, generalización que con propiedad histórica debe llamarse “binomio de Newton”, fue expuesta por éste ya en una de las cartas a Leibniz de 1676 en la forma

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + etc.$$

Donde los coeficientes A, B, C,… se dan en forma recurrente, pues cada uno representa el término anterior en la suma del segundo

miembro. He aquí un ejemplo de Newton, donde da dos desarrollos distintos de la misma expresión.

$$\sqrt[5]{c^5 + c^4x - x^5} = c + \frac{c^4x - x^5}{5c^4} - \frac{2c^8x^2 - 4c^4x^6 - x^{10}}{25c^8} + \cdots$$

Donde

$$m = 1\,;n = 5\,;q = \frac{c^4x - x^5}{c^5}\;;A = c\,;B = \frac{c^4x - x^3}{54}\ldots$$

Mientras que, si se toma

$$P = -x^5\,;Q = \frac{c^4x - c^5}{-x^5}$$

Se obtiene

$$\sqrt[5]{c^5 + c^4x - x^5} = -x\frac{c^4x - c^5}{4} + \frac{2c^8x^2 + 4c^9x + 2c^{10}}{15x^8} + \cdots$$

agregando Newton, con claro atisbo de la convergencia, que el primer desarrollo ha de elegirse si x es pequeño, mientras que ha de elegirse el segundo para x grande.

Como ejemplo de la integración de una diferencial binomia, veamos el caso del integrando $x^{\beta}(a + b^n)^{\lambda}$ en el cual, mediante transformaciones que no difieren mayormente de las actuales, llega al desarrollo siguiente, donde los coeficientes *A, B, C*,... tienen igual significado que la fórmula del binomio:

$$Q\left(\frac{x^{\omega}}{s} - \frac{a}{b}\cdot\frac{r-1}{s-1}\frac{A}{x^n} + \frac{a}{b}\cdot\frac{r-2}{s-2}\frac{B}{x^n} - \frac{a}{b}\cdot\frac{r-3}{s-3}\frac{C}{x^n} + \cdots\right)$$

$$Q = \frac{(a + bx^n)^{\lambda+1}}{nb}\;;\;\omega = \theta + 1 - n\,;\;nr = \theta + 1\,;\;\lambda + r = s$$

(3) La cuadratura como problema inverso del de la tangente. Newton parte de la curva *OMN*, tal que el área z del recinto *OMN'* sea

$$z = \frac{an}{n+m}x^{\frac{n+m}{n}}$$

Que escribe en la forma

$$z = cx^{\frac{P}{n}}$$

De donde $z^n = c^n x^p$, ecuación a la que aplica el método de Barrow para la determinación de la tangente, considerando como incremento de x el segmento o y, por tanto, como incremento de z el valor oy, siendo y la ordenada de la curva. Será entonces

$$(z + oy)^n = c^n (x + o)^p \ ; \ z^n + nz^{n-1} oy + \cdots$$

$$= c^n (x^p + px^{p-1} o + \cdots) \quad ; \quad nz^{n-1} y + \cdots = c^n px^{p-1} + \cdots$$

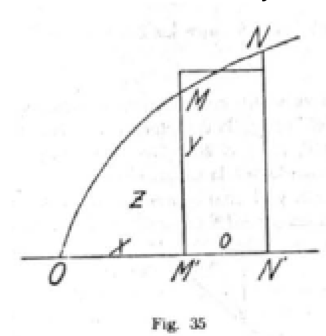


Fig. 35

De donde

$$y = \frac{c^n px^{p-1}}{nz^{n-1}} = \frac{c^n x^p}{z^n} \cdot \frac{pz}{nx} = \frac{pz}{nx} = \frac{(m+n)anx^{\frac{n+m}{n}}}{(n+m)nx} = ax^{\frac{m}{n}}$$

ordenada de la curva cuya área resulta el valor de z.

(4) El método de las fluxiones. Veamos, como ejemplo, la determinación entre las fluxiones (es decir, la ecuación diferencial), cuando las fluentes (es decir, las variables) están vinculadas por la relación

$$x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - x^2\sqrt{ay + x^2} = 0$$

Tratándose de expresiones no enteras, Newton transforma la ecuación en un sistema de ecuaciones enteras mediante las sustituciones:

$$z = \frac{by^3}{a+y} \ ; u = x^2\sqrt{ay + x^2}$$

Y el sistema es

$$x^3 - ay^2 + z - u = 0 \qquad (1$$

$$by^3 - az - yz = 0 \qquad (2$$

$$ax^4 y + x^6 - u^2 = 0 \qquad (3$$

Determinemos, por ejemplo, las fluxiones en la ecuación 2. Sustituyendo en esa ecuación las fluentes más sus momentos

$$b(y+\dot{y}o)^3 - a(z+\dot{z}o) - (y+\dot{y}o)(z+\dot{z}o) = 0$$

Efectuando las operaciones, teniendo en cuenta la 2, dividiendo por o y luego anulando los momentos, se llega a la relación

$$3by^2\dot{y} - a\dot{z} - y\dot{z} - z\dot{y} = 0 \qquad (4$$

Igualmente $$3x^2\dot{x} - 2ay\dot{y} + \dot{z} - \dot{u} = 0 \qquad (5$$

$$4ax^3y\dot{x} + ax^4\dot{y} + 6x^5\dot{x} - 2u\dot{u} = 0 \qquad (6$$

Eliminando $z, u, \dot{z}, \dot{u}$ entre 2, 3, 4, 5, 6 se llega a la relación buscada.

(5) Los incrementos evanescentes de Newton. Newton considera, por ejemplo, el "triángulo característico" mixtilíneo, formado por los incrementos *MP*, *PN* y el arco *MN*, que compara con los triángulos *MPN* y *MPT*, siendo *MT* la tangente en *M*, y dice que al coincidir *N* con *M,* la cuerda y el arco coinciden con la tangente y el triángulo mixtilíneo evanescente *MPN* en su última forma es semejante al *MPT*, y sus lados evanescentes *MP, PN* y *MN* son proporcionales a los lados del triángulo *MPT*, de ahí que las fluxiones de la abscisa, de la ordenada y del arco, que al final son las razones de los incrementos evanescentes, sean proporcionales a los lados del triángulo *MPT* o, lo que es lo mismo, a los lados del triángulo *MRM'* formado por la ordenada, la tangente y la subtangente.

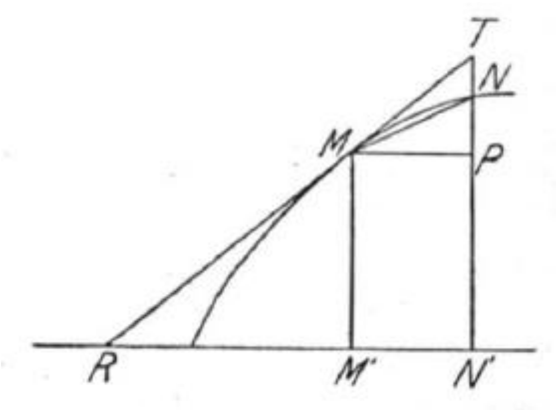


Fig. 36

Aplica un razonamiento semejante en los *Principia*, con ayuda del cual puede aplicar los nuevos resultados utilizando los métodos de los antiguos.

(6) El radio de curvatura por Newton. Es interesante comparar la demostración de Huygens con la de Newton. Éste considera el triángulo característico *ADB* y las normales en *A* y en *B* que determinan en *C* el centro de curvatura y construye *CGF*, semejante al *ADB* y tal que *CG= 1*. Por ser $AD = \dot{x}o$; $BD = yo$, será $FG = DB : AD = \dot{y}:\dot{x}$; llamando z a este cociente será $FH = zo$. Del triángulo rectángulo *ABE* deduce $DE = BD^2 : AD$ y de los triángulos semejantes *AEC* y *FHC* deduce el radio de curvatura $AC = R= FC{\cdot}AE:FH = FC\ (AD+\ DE:):FH = FC\ (AD^2+DB^2) : FH \cdot AD = FC\cdot AD\ (1+FG^2) : FH =$

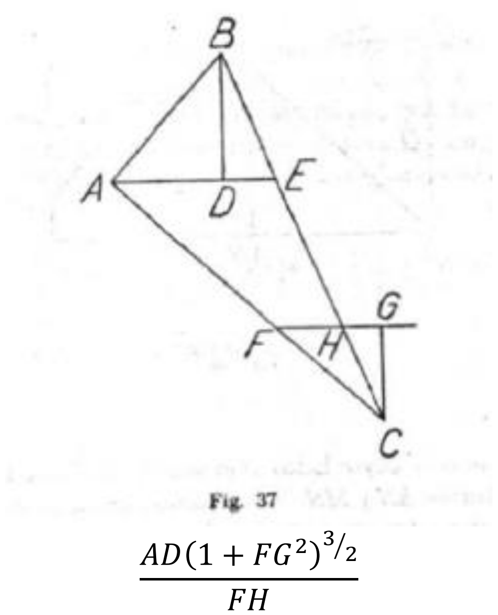


Fig. 37

$$\frac{AD(1+FG^2)^{3/2}}{FH}$$

Y, con la notación newtoniana,

$$R = \frac{x(1+z^2)^{3/2}}{z}$$

Si se hace $x = 1$, lo que a veces hace Newton al suponer que el fluir del tiempo es el fluir de la variable x, y se considera que z y $\dot{z}$ son la primera y segunda derivadas de la función, la fórmula anterior es la expresión actual del radio de curvatura.

(7) una ecuación diferencial de Newton. He aquí un ejemplo de ecuación diferencial del tipo actual lineal que, según la nomenclatura newtoniana, es un caso del segundo tipo del "método inverso de la tangente": determinar las fluentes tales que

$$\dot{y}:\dot{x} = 2 + 3x - x^2 - y(2 - x^2).$$

Para resolver la cuestión Newton desarrolla y en serie con coeficientes indeterminados. Sustituye esa serie y su fluxión en la ecuación y determina los coeficientes mediante igualación. Dando al primer coeficiente un valor determinado (nuestra constante de integración) obteniendo una solución particular desarrollada en serie.

(8) La serie de Leibniz. Leibniz obtuvo las actuales series del arco tangente circular y del arco tangente hiperbólico mediante el cálculo de los sectores elíptico e hiperbólico, desarrollados en series. En el caso elíptico Leibniz considera una elipse de centro O, semejantes a y b y del sector AOM, uno de cuyos lados es el semieje, del cual toma las tangentes en los extremos AN y MN. Toma como parámetro un valor t tal que $AN = bt$ y demuestra, en virtud de las propiedades de la elipse, que $AM' = 2at^2:(1+t^2)$ y que el cuadrilátero $OANM$ es abt. Para calcular el área de la figura mixtilínea ANM' considera los triángulos MNN' de altura AM' y base $NN' = bt$, de área $abt_1t^2:(1+t^2)$; desarrolla en serie la función en t y variando éste desde A a N obtiene como área de ANM el valor

$$ab\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} - \cdots\right)$$

que, al restarla del área del cuadrilátero $OANM$, da finalmente como área del sector elíptico

$$OAM = ab\left(t - \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} - \cdots\right)$$

que para $t = 1$ corresponde al cuarto de círculo, apareciendo por tanto un nuevo desarrollo en serie del número π, que ya había dado en forma independiente Gregory:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Para el sector hiperbólico Leibniz encuentra una fórmula semejante, cambiando t^2 por $-t^2$.

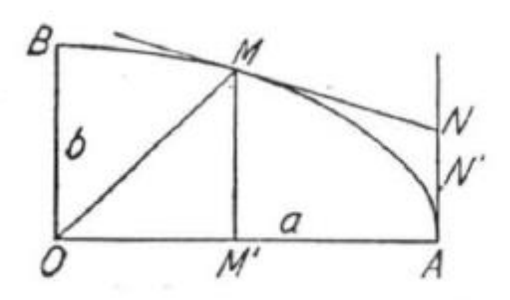


Fig. 38

(9) El problema de De Beaune. Leibniz resolvió uno de los más difíciles problemas propuestos por De Beaune a Descartes, que éste había estudiado pero sin resolverlo completamente. Se trata de determinar la curva cuya ordenada es a la subtangente como un segmento dado es a la diferencia de la ordenada comprendida entre una curva y una recta dada. Si ésta es la bisectriz del primer cuadrante, esa propiedad se expresa, mediante las diferenciales de Leibniz, como $a\,dx = (y - x)dy$, ecuación diferencial que Leibniz resuelve, para el caso particular que satisface la condición $x = y = 0$, por el método de los coeficientes indeterminados. En el resultado

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \frac{1}{2{,}3}\left(\frac{y}{a}\right)^3 + \frac{1}{2{,}3{,}4}\left(\frac{y}{a}\right)^4 - \cdots$$

Reconoce el carácter logarítmico de la curva.

EL SIGLO XVIII

El siglo newtoniano

Por sus características culturales el siglo XVIII fue calificado de "siglo de las luces", de la "Ilustración", del "Iluminismo": fue el "siglo de la razón". Pero desde el punto de vista de la historia de la ciencia y en especial de la ciencia exacta, fue en verdad un siglo newtoniano: casi podría afirmarse que desde tal punto de vista el siglo XVIII nace en 1687, fecha de la aparición de los *Principia* de Newton, libro promotor del auge de la mecánica, de la astronomía y del cálculo infinitesimal, característico de aquel siglo.

El éxito de la gravitación universal que, juntamente con las leyes de la mecánica newtoniana, permite traducir en ecuaciones diferenciales los movimientos celestes, y el cálculo que logra resolverlas prediciendo el porvenir, releer el pasado y calcular hasta sus últimos pormenores el mecanismo que parecía secreto inviolable, dio a la ciencia exacta notable impulso.

Al abrigo de ese impulso, la matemática del siglo XVIII mostró su fecundidad no tanto en el sentido de la creación de nuevas ramas, como lo había sido el siglo anterior, sino en el sentido de la elaboración de esas nuevas ramas y sobre todo en la riqueza de las aplicaciones, en especial del nuevo cálculo infinitesimal. De allí que un rasgo relevante de la matemática del siglo fue su condición de ciencia auxiliar, de "doncella de la ciencia natural", sin duda de gran utilidad, pero auxiliar al fin.

La tarea más importante de los matemáticos del siglo se realizó pues en el campo de los métodos infinitesimales y de sus aplicaciones, contrastando los progresos técnicos y el éxito de las aplicaciones con la debilidad de sus fundamentos básicos, que continuaron envueltos en vaguedades y contradicciones. Es conocida la frase con que D'Alembert alentaba a los estudiantes, vacilantes ante tantas dificultades y oscuridades de esos fundamentos: "Allez en avant et la foi vous viendra"; es decir: Proseguid y confiad, ya llegará la fe.

Aunque los métodos infinitesimales de Newton y Leibniz se hicieron conocer hacia fines del siglo XVII, la difusión de las nuevas ideas que ellos encerraban fue muy lenta. El carácter novedoso de esas ideas, las notaciones inusitadas y diferentes, su publicación en memorias aisladas y fragmentarias, todo contribuía a que los nuevos métodos no se extendieran rápidamente, de manera que a fines del siglo XVII, fuera de sus autores, eran pocos los matemáticos que estaban enterados de esos métodos, y sobre todo muy pocos los que estaban en condiciones de aplicarlos. Entre estos últimos figuran los Bernoulli, nombre que campeará en la matemática en un período de aproximadamente dos siglos.

La familia Bernoulli, de origen holandés pero residente en Suiza, proporcionó durante los siglos XVII, XVIII y XIX más de una docena de matemáticos, de los cuales tres sobresalen: Jacob (1), su hermano Johann (1) y uno de los hijos de éste, Daniel (1). Con los Bernoulli se vincula, además, el mayor de los matemáticos del siglo de la razón: Euler.

La obra matemática de Jacob Bernoulli se repartió por igual entre los nuevos métodos infinitesimales y el cálculo de probabilidades. En el primer campo se ocupó de series y de las propiedades de las curvas, introduciendo el uso sistemático de las coordenadas polares, que hasta entonces sólo se habían aplicado al estudio de las espirales. Las notables propiedades que descubrió en la espiral logarítmica, que se reproduce en su evoluta, en su envolvente, en su cáustica, etcétera, lo llevó a imitar el gesto de Arquímedes, pidiendo que en su tumba se grabase esa curva con la leyenda *Eadem mutata resurgo* (Aunque cambio resurjo la misma).

Se le debe la primera resolución con demostración del problema de la "curva descensus aequabilis" propuesto por Leibniz, es decir, de la curva isócrona tal que un punto cae sobre esa curva con movimiento uniforme respecto de la vertical. (1) Es en ese estudio donde aparece por primera vez la palabra "integral"' con la acepción actual.

En enconada emulación científica con su hermano Johann, fueron propuestos y resueltos numerosos problemas de aplicación de los métodos infinitesimales a la geometría y a la mecánica. Así Johann propuso en 1696 el problema de la curva de tiempo mínimo (braquistócrona) que fue resuelto, entre otros, por Jacob mientras

éste propuso la ecuación diferencial que hoy lleva el nombre de Bernoulli y que fue resuelta por Johann. (2) El problema de las trayectorias isogonales, y en particular ortogonales, fue propuesto en 1694 por Johann, pero al principio pasó inadvertido, y fue reiterado por Leibniz en 1716, para "tantear el pulso de los matemáticos ingleses."

El problema de los isoperímetros, propuesto por Jacob y estudiado por ambos hermanos, provocó una agria disputa entre éstos, que continuó entre Johann y otros matemáticos aún después de la muerte de Jacob. La forma original de este problema era la siguiente: entre todas las líneas de igual perímetro y que tienen iguales extremos, determinar aquélla tal que cierta función de sus ordenadas tenga área máxima, o mínima. Este problema, el de la braquistócrona, el de la superficie mínima de revolución y varios otros, atacados en violenta competencia y resueltos por uno u otro de los apasionados hermanos, dieron origen a la disciplina matemática hoy conocida como "cálculo de variaciones".

La obra más importante de Jacob es *Ars Conjectandi,* aparecida ocho años después de su muerte, con la cual el cálculo de probabilidades adquiere autonomía científica. Se compone de cuatro partes: la primera reproduce, con valiosos comentarios, la obra de Huygens sobre probabilidades; la segunda es un tratado de combinatoria y en ella aparece la expresión, que Bernoulli deduce inductivamente partiendo de la suma de los números combinatorios de igual denominador, de la suma de las primeras diez potencias de los primeros *n* números naturales, expresión en la que aparecen los coeficientes hoy llamados "números de Bernoulli", algunas de cuyas propiedades estudia. La tercera parte se refiere a los juegos de azar y la cuarta, incompleta, aplica "las doctrinas precedentes a cuestiones civiles, morales y económicas". En esta última parte aparece el problema de límites hoy denominado "teorema de Bernoulli", y la llamada "ley de los grandes números".

Según Mach, en los dos hermanos Bernoulli se dieron, aunque separadamente, los dos aspectos del genio científico: Mientras Johann es un verdadero artista en el dominio de las ciencias naturales, Jacob está dotado de un mayor espíritu crítico, aunque con menor imaginación creadora.

Además de su labor como físico-matemático se deben a Johann numerosas contribuciones matemáticas, muchas en combinación, o mejor en oposición, a su hermano Jacob y hasta a su hijo Daniel. Esas contribuciones se refieren especialmente a la teoría de las series y a la aplicación de éstas al cálculo integral y a las ecuaciones diferenciales. En especial se le debe la cuadratura de funciones de la forma x^x y los métodos del factor integrante y de la separación de variables en la integración de las ecuaciones diferenciales. Un original método de cuadratura por series, expuesto en 1694, dio nacimiento a una serie que no es sino un caso particular de la hoy llamada "serie de Taylor", de unos veinte años después. A veces se designa aquella serie con el nombre de "serie de Bernoulli". (3)

Con el nombre de Johann Bernoulli está íntimamente vinculado el del Marqués de I'Hôpital, único francés que durante mucho tiempo estuvo en condiciones de resolver los problemas que Leibniz y los Bernoulli proponían a los matemáticos de la época y autor del primer tratado sistemático de cálculo diferencial: *Analyse des infiniment petit pour l'intelligence des lignes courbes*, aparecido anónimo en 1696 y con nombre de autor a partir de 1715. El hallazgo, en este siglo, de los apuntes de la lecciones de Bernoulli y, sobre todo, el contenido de la correspondencia de Bernoulli con I'Hôpital, muestran que el libro del marqués no contiene sino las lecciones que le impartió Bernoulli, a su pedido, y la enseñanza que siguió impartiéndole por correspondencia. Las lecciones de Bernoulli comprenden también el cálculo integral, que el marqués no publicó pues se había enterado de que pensaba hacerlo Bernoulli directamente. Las lecciones de cálculo integral, impartidas a I'Hôpital durante los años 1691-1692, habrían sido pues el primer tratado sistemático sobre el tema y resumen de todos los conocimientos de la época sobre aquél: integración (de potencias o series de potencias), cuadraturas, rectificaciones, ecuaciones diferenciales y aplicaciones geométricas y mecánicas. En esas lecciones aparece la constante de integración y los métodos de integración por sustitución de variables.

En el *Anlyse* se siguen designando diferencias a las diferenciales, aparecen los términos de abscisa (la coupée) y de círculo osculador ("cercle baisant") y aparece la célebre regla, comúnmente vinculada con el nombre de I'Hôpital, más tarde convertida en

teorema, para el cálculo de límites indeterminados y cuya paternidad reivindicó Bernoulli después de la muerte del marqués. (4)

Aunque opuesto a los nuevo métodos que en Francia estaban representados por el marqués de I'Hôpital, su compatriota y contemporáneo Michel Rolle es conocido en la historia de la matemática por un teorema que lleva su nombre y que se refiere al nuevo algoritmo. Rolle se ocupó en especial de la resolución de ecuaciones, de las que obtuvo, en una transformación lineal, una serie de polinomios de grado decreciente que denominó "cascadas", que no son sino las derivadas sucesivas de la ecuación. Utilizó esas "cascadas" para determinar un límite superior de las raíces, así como para enunciar el teorema que lleva su nombre que aplicó, como actualmente, a la separación de las raíces reales de una ecuación.

En Italia se ocuparon de los nuevos métodos infinitesimales Riccati y Fagnano. Jacopo Riccati se ocupó de transformación e integración de ecuaciones, una de las cuales, que lleva su nombre, fue estudiada en especial por Daniel Bernoulli, quien mostró en qué casos podía integrarse mediante un número finito de términos.

Giulio Carlo, conde de Fagnano fue más original. Se ocupó de geometría y en especial de geometría del triángulo, adelantándose a Euler en el empleo e interpretación de los exponentes imaginarios, aunque su contribución más importante se refiere a la rectificación de las curvas. Sus estudios sobre la rectificación de los arcos de elipse y de hipérbola pueden considerarse como punto de partida de las integrales elípticas. En conexión con estos estudios llegó a la interesante propiedad de que el cuadrante de lemniscata (curva estudiada por primera vez por Jacob Bernoulli en l694) puede dividirse, como el de la circunferencia, en un número de partes, con regla y compás, siempre que ese número contenga los factores 2^n, 3 y 5.

En Alemania, el único matemático de esta época que se ocupó de los nuevos métodos, aunque sin mayor éxito, fue Ehrenfried Walter von Tschirnhausen, más conocido por su método de transformación de ecuaciones con el cual resolvió las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado, pero que ya no tenía éxito al aplicarlo a las de grado superior. Con todo, el método de

Tschirnhausen quedó como método de transformación, si no de solución. Parece que ya Leibniz había previsto la imposibilidad de resolver ecuaciones de grado superior por ese método, pues en carta al autor le dice: "… no me parece que logre tener éxito en las ecuaciones de grado superior, excepto para casos particulares. Creo disponer de una demostración de esta afirmación." Leibniz nunca dio tal demostración, en cambio parece que también él, como otros matemáticos de los siglos XVII y XVIII, se ilusionó en resolver algebraicamente la ecuación de quinto grado. "Nadie hasta hoy dio una fórmula general para la solución de las ecuaciones de grado superior -dice- creo haber encontrado un método adecuado y puedo probarlo, pero aún no he podido vencer el fastidio provocado por los tediosos cálculos necesarios."

En Inglaterra, después de las fluxiones, el acontecimiento matemático más clamoroso, según el historiador Cajori, fue la crítica que el filósofo George Berkeley dirigió a los nuevos métodos. Esa crítica tuvo un origen extramatemático y aparece en *The Analyst* de 1734, cuyo subtítulo reza: "O discurso dirigido a un matemático infiel, donde se examina si el objeto, principios e inferencias del análisis moderno son concebidos más claramente o son deducidos con mayor evidencia que los misterios de la religión y de los asuntos de la fe".

El "matemático infiel" era Edmund Halley, el astrónomo que, entre otros méritos, tuvo el de sufragar los gastos de impresión de los *Principia* de Newton. Como científico, Halley se ocupó también de matemática; se le deben restauraciones de Apolonio y la propiedad de la proporcionalidad de los logaritmos del mismo número en bases diferentes.

Halley fue sin duda un libre pensador y, en cierto sentido, activo, de ahí la acusación de infiel de Berkeley, pues por el hecho de ser reputado un gran matemático y por eso un maestro de la razón, utilizaba indebidamente su autoridad opinando y decidiendo sobre cuestiones ajenas a su incumbencia, sobre las que no tenía derecho alguno a opinar. Hábil polemista, Berkeley se dirige entonces hacia los objetos mismos de la ciencia que Halley profesa, mostrando triunfalmente que quienes se quejan sin razón de la incomprensibilidad científica de la religión, aceptan una ciencia

que en su raíz misma es incomprensible y cuyas conclusiones se apoyan en raciocinios que la lógica no acepta.

Si bien la finalidad de Berkeley no es tanto criticar los nuevos métodos como vindicar los misterios de la fe, la crítica contra aquellos métodos es pertinente, aguda, incisiva. En efecto, los nuevos métodos, tanto en la forma de Newton como en la de los matemáticos continentales, estaban envueltos en principios oscuros, vagos y contradictorios. Acertadamente Berkeley critica esos "incrementos evanescentes", esos "momentos" que no son cero pero que luego se anulan y que califica de "fantasmas de cantidades desaparecidas", aquellas fluxiones de fluxiones, aquellos infinitamente pequeños de infinitamente pequeños, etcétera. En sus críticas, en las que esgrimía hábilmente el principio de contradicción, envuelve no sólo a los principios del nuevo algoritmo, sino a las demostraciones mismas que los matemáticos empleaban en él.

La incisiva crítica de Berkeley era, desde el punto de vista técnico, inobjetable y se explica entonces la impresión que causó entre los mismos matemáticos. Es en cambio muy objetable la doctrina de "compensación de errores", en la que se embarcó Berkeley, impresionado sin duda por el aparentemente paradójico hecho de que fundándose sobre principios y demostraciones tan deleznables, los nuevos métodos lograran resultados exactos, como lo comprobaba el extraordinario triunfo de la mecánica newtoniana. Cabe agregar que en esa teoría de compensación de errores, Berkeley no se encuentra solo, pues más tarde fue adoptada por matemáticos y hasta buenos matemáticos. (5)

Quizá desde el punto de vista técnico la parte más interesante del *Analyst* es un apéndice de *67 Queries*, donde se plantean cuestiones acerca del cero y del infinito, de la divisibilidad infinita, del carácter metafísico del tiempo, del espacio y del movimiento absolutos, etcétera.

La influencia de la crítica de Berkeley se hizo sentir en forma más o menos visible en todos los matemáticos ingleses, contemporáneos o inmediatos sucesores de Newton.

De éstos, el más antiguo es Abraham De Moivre, de origen francés pero residente en Londres desde la revocación del Edicto de Nantes. Se ocupó en especial de probabilidades y, por tanto, de

los ternas vinculados con los números combinatorios, suma de las potencias de los números naturales, etcétera. Introdujo el estudio de las "series recurrentes", en las que los coeficientes se determinan mediante una ley lineal fija de los coeficientes anteriores, así como la fórmula que lleva su nombre para la potenciación de los números complejos. (6)

De Moivre se ocupó también de descomposición en factores simples de las expresiones algebraicas, completando estudios realizados por Roger Cotes, brillante matemático muerto lamentablemente muy joven.

Cotes dio en forma geométrica la descomposición de las ecuaciones trinomias en factores, y el teorema que hoy lleva su nombre. También se adelantó a Euler en la relación entre las funciones circulares y los exponentes imaginarios y completó la fórmula de Newton, hoy llamada de Newton-Cotes, para la integración aproximada, partiendo de los valores de *n* ordenadas correspondientes a abscisas equidistantes.

Contemporáneo de los anteriores es Brook Taylor, que se ocupó de física y de matemática. Además de una obra sobre perspectiva, en la que sienta las bases del actual método de proyección central, se le debe un *Methodus incrementorum, directa e inversa* de 1715, en el que hace uso sistemático de las diferencias finitas. En esa obra y partiendo de las diferencias da la serie hoy conocida por su nombre, (7) aunque sin consideración alguna respecto de su convergencia. También llega a la serie en la forma dada por Johann Bernoulli, pero partiendo del método de integración por partes y no de la identidad de la cual había partido Bernoulli.

Asimismo se deben a Taylor fórmulas para el cambio de variable independiente e investigaciones acerca de ecuaciones diferenciales y de resolución aproximada de ecuaciones.

También se ocupó de diferencias finitas James Stirling en su *Methodus differentialis*, con sumas o series de términos que son polinomios de factoriales de grado positivo o negativo, así como la fórmula que lleva su nombre para *n!,* cuando *n* es muy grande. En realidad esa fórmula la obtuvo continuando los trabajos de De Moivre sobre el desarrollo en serie del logaritmo de *n!,* de ahí que a veces se la cita como fórmula de Moivre-Stirling.

En un trabajo de 1717 en el que Stirling se ocupa de cúbicas, aumenta en 4 el número de las dadas por Newton y estudia las propiedades generales de las curvas algebraicas aplicándolas a las de segundo y tercer grado.

De geometría, álgebra, cálculo infinitesimal, así como de física y astronomía se ocupó el último matemático inglés y quizás el más importante del período, Colin Maclaurin, quien para escapar a las críticas de Berkeley, volvió a los clásicos métodos de los geómetras antiguos, con lo que, si bien logró hacer más rigurosas las demostraciones, contribuyó indirectamente a aumentar el aislamiento de los matemáticos ingleses frente a los continentales.

En su *Geometría orgánica* de 1719, así como en su *De Linearum geometricarum propietatibus* de 1720 y en varias memorias más, Maclaurin dio numerosas propiedades de las curvas algebraicas, generalizando teoremas conocidos y exponiendo nuevas propiedades, en especial para las curvas de segundo, tercero y cuarto grado. En su *Álgebra* (póstuma) utiliza indistintamente números positivos y negativos y trata de justificar la regla de los signos.

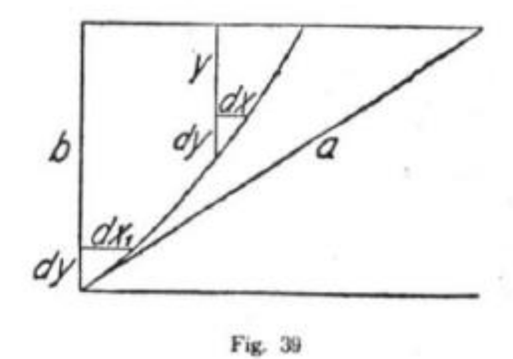


Fig. 39

Su *Treatise on Fluxiones* en dos volúmenes (1737, 1742) es un tratado sistemático del cálculo de las fluxiones con sus aplicaciones geométricas y mecánicas, que hizo declarar a Lagrange que era "una obra maestra de geometría, que puede compararse a todo lo que Arquímedes nos legó de más hermoso e ingenioso". En ese tratado se deduce la serie binómica de Newton por un método de coeficientes indeterminados que, aplicado a funciones cualesquiera, dio lugar a la llamada "serie de Maclaurin" que el

autor mismo reconoció no ser sino un caso especial de la serie de Taylor.

También aparece en ese tratado el método de integración aproximada, llamado hoy de Maclaurin, en el que cada trapezoide es sustituido por el rectángulo de altura la ordenada en el punto medio, así como la fórmula, descubierta independientemente por él y por Euler, que expresa la sumatoria de una función mediante la integral y las derivadas.

Notas complementarias

(1) La integración de la isócrona. Jacob Bernoulli parte de la propiedad siguiente: a pequeños intervalos iguales de tiempo, es decir a pequeños descensos verticales iguales, corresponden arcos de curva tales que los cuadrados de los recorridos son proporcionales a las caídas; por tanto, si se compara un punto variable de la curva de altura de caída y con un punto fijo de altura de caída b y correspondiente longitud de la tangente a, se tiene:

$$\frac{y}{b} = \frac{dx^2 + dy^2}{dx_1^2 + dy^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{\frac{a^2 dy^2}{b^2}} \quad ; \quad a^2 y dy^2 = b^3(dx^2 + dy^2)$$

de donde $dy\sqrt{a^2 y - b^2} = \sqrt{b^3}dx$, cuya integración da por resultado una parábola semicúbica.

(2) La integración de la ecuación de Bernoulli. El método utilizado por Johann Bernoulli para integrar la ecuación propuesta por Jacob, en la forma $ady = ypdx + by^n qdx$, donde a y b son constantes y p y q funciones de x, no difiere esencialmente del actual. En efecto, Johann hace $y = mz$, siendo m y z dos funciones indeterminadas. Obtiene

$$ady = amdz + azdm = mzpdx + m^n z^n qbdx$$

y elige las funciones de tal manera que $amdz = mzpdx$, y por tanto

$$\frac{adm}{m^n} = bz^{n-1}qdx$$

De la primera de estas dos ecuaciones deduce z que, sustituida en la segunda, permite obtener m. El producto de las dos funciones así obtenidas es y.

(3) La "seria de Bernoulli". Johann Bernoulli parte de la siguiente identidad, en la que por comodidad sustituimos la notación bernoulliana ddy, dddy,... por la actual d^2y, d^3y,...

$$ydx = ydx + xdy - xdy - \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx} + \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx} -$$

$$\frac{-x^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^2} - \cdots =$$

$$= d(xy) - d\left(\frac{x^2}{1.2}\frac{dy}{dx}\right) + d\left(\frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \cdots$$

E integrando entre *0* y *x*, llega a

$$\int ydx = xy - \frac{x^2}{1.2}\frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^2y}{dx^2} = \cdots$$

serie con la que puede efectuar cuadraturas mediante el conocimiento de la función y de sus diferenciales sucesivas. Ahora bien, si con notaciones modernas hacemos *y = f (x)*, tendremos:

$\int_0^x ydu = f(x) - f(0)$ y, por lo tanto

$f(0) = f(x) - xf(x) + \frac{x^2}{2}f'(x) -$... que no es sino la serie de Taylor

$f(x+h) = f(x) + hf(x) + \frac{h^2}{2!}f'(x) +$...para $h = -x$.

(4) La "regla de l'Hôpital"'. Esta regla está expuesta en el *Analyse* en forma geométrica. Si y y z son dos funciones, ambas positivas, que se anulan simultáneamente para cierto valor de la variable, sus gráficas se cortarán en el eje en un punto P tal que, observa l'Hôpital, en las proximidades de ese punto el valor del cociente es próximo al del cociente de las diferencias dy y dz, cociente que da el valor de la función y/z en el punto M respectivo. Entre los ejemplos de l'Hôpital figura el cociente, cuyo valor para $x = a$ quiere conocer:

$$\frac{a^2 - ax}{a - \sqrt{ax}}$$

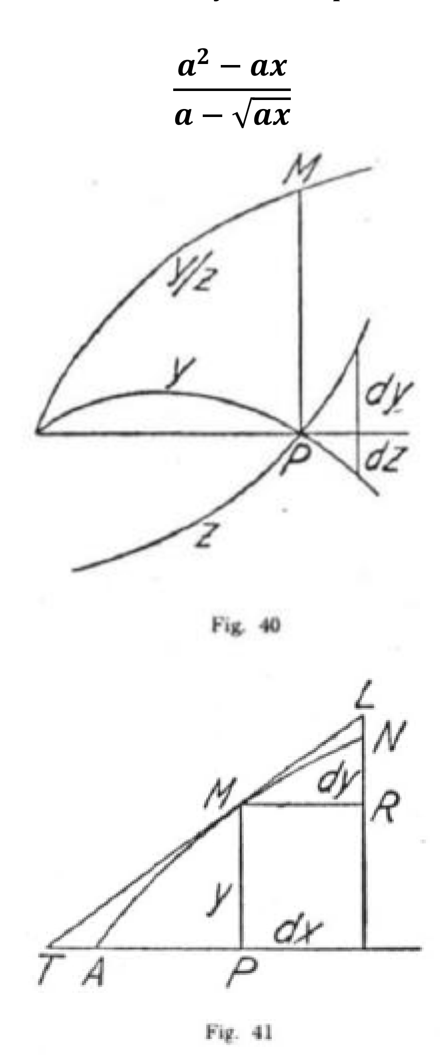


Fig. 40

Fig. 41

Que calcula, ya por la regla, ya directamente racionalizado y eliminado el factor $x - a$. En ambos casos el "verdadero valor" del cociente es $2a$.

(5) La "compensación de errores" de Berkeley. He aquí el razonamiento de Berkeley en el caso de la parábola AMN y su tangente en $M.$ Considera los triángulos semejantes TPM, formado por la ordenada y la subtangente, y el triángulo característico, establece la proporcionalidad $PT: y = dx: RL$, y agrega que $RL = RN + NL = dy + a$; por tanto al tomar, como hace el cálculo infinitesimal, $PT = ydx: dy$ se sustituye $dy + a$ por dy y se comete un error por defecto por ser a > 0.

Por otra parte, si se calcula dy partiendo de la fórmula $y^2 = 2px$, ese cálculo procede de la siguiente manera:$(y + dy)^2 = 2p(x + dx)$, de donde en definitiva

$$dy = \frac{pdx}{y} - \frac{(dy)^2}{2y}$$

Y al tomar para dy, como lo hace el cálculo infinitesimal el valor $-\frac{pdx}{y}$, continúa Berkeley, se comete un segundo error, pero ahora por exceso $-\frac{(dy)^2}{2y}$. Como, según Berkeley, este segundo error es igual y de signo contrario al primero, he ahí la "compensación de errores". En efecto, Berkeley dice que según Apolonio $PT = 2x$, de manera que

$$dy + a = \frac{ydx}{PT} = \frac{ydx}{2x} = \frac{2pdx}{2y} = \frac{2ydy(dy)^2}{2y} =$$

$$= dy + \frac{(dy)^2}{2y} ya = \frac{(dy)^2}{2y}$$

En otra ocasión Berkeley considera que la "compensación de errores" se produce debido a que, al anular la diferencia, por un lado se toman como semejantes triángulos que no lo son, mientras que por el otro se toma como tangente la recta secante.

Por supuesto que no hay tal "compensación" ni tales "errores", lo que ocurre es que en los tiempos de Berkeley la distinción entre el incremento Δy y la diferencia dy aún no se había establecido claramente, de ahí que su confusión trajera aparejados los

pretendidos errores de Berkeley. Por lo demás, en el caso particular considerado por Berkeley el valor de a es negativo y sólo por dejarse llevar por la figura Berkeley puede admitir erróneamente que se trata de dos errores distintos que se compensan. En realidad, se trata siempre del mismo valor: la diferencia entre el incremento y la diferencia.

(6) La fórmula de De Moivre y el teorema de Cotes. De Moivre enunció la fórmula que lleva su nombre, sin demostración, de la siguiente forma:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}}}$$

Donde $l = \cos A$; $x = cosB$; $A = nB$.

En cuanto al "teorema de Cotes", su enunciado es el siguiente: Si desde un punto O se trazan secantes a una curva algebraica de orden n que la cortan en los puntos $P_1, P_2,\ P_3, \dots P_n$, el punto P tal que $\frac{n}{OP} = \frac{1}{OP_1} + \frac{1}{OP_2} + \frac{1}{OP_3} + \cdots \frac{1}{OP_n}$ describe una recta.

(7) La serie de Taylor. En la deducción de la sede que lleva su nombre Taylor parte de la fórmula de Newton que expresa una función mediante las diferencias finitas

$$f(x + n\Delta x) = y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 y + \cdots$$

e indicando con $u = \Delta x$; $u' = (n-1)\Delta x$; $u'' = (n-2)\Delta x$;... la fórmula anterior se transforma en

$$f(x + u) = y + \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{uu'}{1.2}\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \frac{uu'u''}{1.2.3}\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \cdots$$

Bastará hacer Δx pequeña y n grande para que los valores de u, u', u'', se hagan iguales y en definitiva

$$f(x + u) = y + u\frac{dy}{dx} + \frac{u^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{u^3}{3!}\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots$$

Que es la serie de Taylor.

Euler

Paralelamente con el desarrollo de la mecánica y con el fin de servirla, el siglo XVIII fue también el siglo del algoritmo; es decir, fue el siglo en el que el análisis, tanto en el campo del álgebra como en el del cálculo infinitesimal, adquiere vida propia y tiñe a toda la matemática de un marcado carácter formal aunque no riguroso. En cierto sentido el análisis se independiza de la geometría y de la ciencia natural. Si en el siglo anterior la geometría analítica y los métodos infinitesimales habían sido instrumentos analíticos para la solución de problemas geométricos y para la investigación de las leyes naturales, en el siglo XVIII el análisis, sin dejar de proseguir esos fines, se estudia por sí mismo, mientras que la geometría y los fenómenos naturales se convierten además en estímulos para nuevos desarrollos y problemas analíticos.

Este carácter puramente algorítmico de la matemática se pierde a fines de siglo, cuando la geometría vuelve a penetrar en el campo de la matemática, pero ahora con la jerarquía de geometría pura.

La figura representativa del período algorítmico es Leonhard Euler, que además de la matemática cultivó otras disciplinas, entre ellas la física matemática, ciencia que comparte con los matemáticos franceses que sobresalen en ella en el período comprendido entre Euler y Gauss.

Con Euler se comprueba que, en este siglo de la razón, también en la matemática la razón mostró una confianza excesiva. En el período en que, teniendo a su disposición el juego de símbolos algebraicos y el algoritmo infinitesimal, no se duda de que toda ecuación algebraica tiene siempre solución, que toda ecuación diferencial puede siempre integrarse y que cualquier serie puede siempre sumarse. A tal confianza en el poder del símbolo, que en definitiva resultó beneficiosa pues los excesos fueron luego corregidos, agregó Euler una capacidad de calculista pocas veces igualada y una fecundidad prodigiosa.

La publicación de la enorme mole de sus escritos en una *Opera Omnia*, iniciada hace más de medio siglo, no ha completado aún la edición de sus 69 volúmenes proyectados.

Formado en el ambiente de los Bernoulli, Euler –que nunca fue profesor- desarrolló una intensa actividad científica, en gran parte gracias a la protección de las cortes de San Petersburgo y de Berlín, a cuyas publicaciones académicas dio vida durante muchos años y casi por sí solo. Esa actividad no decayó un solo instante; al contrario, la mitad de sus escritos es fruto de los últimos años de su vida cuando, totalmente ciego, dictaba sus trabajos. Tal actividad se manifestó en todos los campos de la ciencia matemática y ciencias afines. Sus memorias, más de un millar, tratan de aritmética y teoría de números, de álgebra y cálculo de probabilidades, de cálculo infinitesimal y de geometría, de mecánica racional y aplicada, de astronomía, de física, de geografía matemática, sin olvidar sus *Lettres à une princesse d'Allemagne* en tres volúmenes (1768-1772) en las que trata cuestiones científicas.

En teoría de números Euler resolvió y generalizó numerosos problemas de Diofanto y de Fermat y abrió nuevos campos de investigación. Dio la solución del "gran teorema" de Fermat para $n = 3$ y $n = 4$ y generalizó la congruencia de Fermat, introduciendo la expresión de Gauss denomino más tarde "indicador".

Se ocupó de análisis indeterminado, de números perfectos y amigos, de la teoría de los restos potenciales y se adelantó a Legendre en el descubrimiento de la ley de reciprocidad de los restos cuadráticos.

También se ocupó de combinatoria y de cuadrados mágicos, a los que agrego el llamado "cuadro latino" mediante el problema: disponer en cuadrado 36 oficiales de seis grados diferentes y pertenecientes a seis regimientos distintos, de tal manera que cada fila y cada columna tenga una oficial de cada grado y de cada regimiento.

Quizás en este campo su máxima contribución pertenece a la teoría de los números primos. Ya en una carta a Christian Goldbach reconoció, sin demostrarla, la verdad de la llamada "conjetura de Goldbach" anunciada en 1742: Todo número par es suma de dos números primos, y si bien en este siglo se realizaron, respecto de esta propiedad, numerosas investigaciones importantes es el hecho de que, al establecer Euler su famosa identidad (1) que vincula la sucesión de números primos con la función analítica que luego Riemann bautizó $\zeta(S)$, inició la actual "teoría analítica de los

números", que lograría importantes desarrollos por la obra de Dirichlet y de Riemann, al establecer una íntima conexión entre la aritmética y la teoría de las funciones analíticas.

En álgebra Euler dio métodos originales de eliminación y de descomposición en fracciones parciales simples. Se ocupó, en general, de la teoría de las ecuaciones en la esperanza de dar con un método general para resolver ecuaciones de grado cualquiera. En este sentido halló un nuevo procedimiento, distinto del de Ferrari, para resolver la ecuación de cuarto grado, procedimiento incluido en un método válido para las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado, pero nada más. Expuso métodos para desarrollar en serie el valor de las raíces, e inició el estudio de las funciones simétricas de las raíces, que tanta importancia adquiriría más tarde en la teoría general de las ecuaciones algebraicas.

Pero es en el cálculo infinitesimal donde aparecen las contribuciones más originales de Euler. Por lo pronto, se le deben los primeros tratados sistemáticos de esa disciplina: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive propietate gaudentes* (1744); *Introductio in analysis infinitorum* (1748, dos volúmenes); *Institutiones calculi differenlialis* (1755); *Institutiones calculi integralis* (1768-1770, tres volúmenes).

En su Introductio Euler utiliza el concepto de función, cuyo símbolo $f(x)$ también le pertenece: en la forma que conservó mucho tiempo: función de x es toda expresión analítica de esta variable obtenida mediante una combinación finita o infinita de símbolos algebraicos o trascendentes (esta distinción también es de Euler). A veces dio también otra acepción de función, al referirse a toda relación entre x e y tal que se represente en el plano mediante una curva trazada a "mano libre", es decir una curva continua dentro de la acepción vulgar de la continuidad.

En conexión con las funciones trascendentes aparece una de las más notables contribuciones de Euler: los logaritmos como exponentes y su vinculación con los números imaginarios y las funciones circulares. En verdad, el resultado que hoy denominarnos fórmulas de Euler, que se escriben, por ejemplo, en la forma

$$i \sin \alpha = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right); \quad \cos \alpha = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right)$$

es la conclusión de un largo pleito iniciado con Leibniz acerca de los logaritmos de los números negativos e imaginarios, al cual Euler pone fin, aunque en verdad las explicaciones de Euler acerca de la multiplicidad de los valores de la función logarítmica no fueron entonces entendidas y las discusiones continuaron durante todo el siglo. (2) Las letras *π, e, i,* con los significados actuales, así como la definición de las potencias de base *e* como límites infinitos, se deben también a Euler.

Asimismo aparecen, en el primer tomo de la *Introductio*, las sumas de las potencias de exponente par de los recíprocos de los números naturales, que deduce del desarrollo en producto infinito de la función *sen x*. así como el estudio sistemático de las "fracciones continuas" (el nombre le pertenece) dando el desarrollo de algunas funciones en fracción continua infinita.

El segundo tomo de la *Introductio* es un tratado de geometría analítica plana y del espacio en la forma actual. Aparecen las coordenadas polares, las fórmulas de transformación de coordenadas y las propiedades generales de las curvas algebraicas, en especial las de segundo, tercero y cuarto grado. Las consideraciones infinitesimales se soslayan considerando, como ecuación de la curva, su desarrollo en serie en las proximidades de uno de sus puntos. Se ocupa también de la intersección de curvas y superficies, así como de curvas trascendentes y evita a veces su dificultad mediante oportunas ecuaciones en forma paramétrica. (3)

En *lnstitutionis calculi differentialis* considera el cociente de diferenciales como cocientes de ceros que toman valores finitos. El libro se inicia con el estudio de las diferencias finitas y abarca las diferencias y las sumas de las potencias como operaciones inversas, así como estudia la suma de factoriales de exponentes positivos y negativos. Se ocupa luego de las diferencias de diversos órdenes de funciones algebraicas y trascendentes, de una o varias variables. Con Euler asoma la distinción entre derivadas ordinarias y derivadas parciales, de las que da también un simbolismo especial. Al tratar las funciones de varias variables expone el teorema sobre las funciones homogéneas que lleva su nombre, así como la condición de integrabilidad de una expresión diferencial.

En el estudio de las series da un método de cálculo utilizando la diferencia de los coeficientes, método con el cual calcula numerosas series divergentes, que da resultados inadmisibles desde el punto de vista de la convergencia que prevaleció durante casi todo el siglo pasado, pero no desde un punto de vista funcional que comenzó a admitirse a fines de ese siglo, rehabilitando así al clarividente Euler. La desenvoltura con la que maneja las series, tanto convergentes como divergentes, lo lleva a resultados absurdos dentro del concepto usual de convergencia, como por ejemplo cuando no vacila en escribir

$$\ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 + n + n^2 + \cdots = 0$$

Que logra desarrollando en serie las expresiones

$$\frac{n}{1-n} \quad ; \quad \frac{1}{1-\frac{1}{n}}$$

y sumando ambos resultados.

En este tratado aparece su fórmula de sumatoria, que había encontrado independientemente Maclaurin, en la que aparecen los "números de Bernoulli" (la designación es de Euler). Estudia luego las formas indeterminadas, la interpolación, etcétera. Sus aplicaciones son todas algebraicas, pues se jacta de qué no necesita recurrir a figuras.

Sus *Institutiones calculi integralis,* libro escrito cuando ya estaba ciego, comprende tres volúmenes (el cuarto póstumo contiene una selección de memorias), que tratan los temas comunes del cálculo integral actual, desde las cuadraturas hasta la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias y con derivadas parciales, y nociones de cálculo de variaciones, nombre que Euler acuñó para referirse a problemas de los cuales ya se había ocupado en su tratado de 1744.

Agreguemos que, entre muchas otras contribuciones de Euler. (4) figuran los primeros problemas concretos de la rama matemática vislumbrada por Leibniz con el nombre de "Analysis Situs", hoy denominada Topología.

El gran favor que los métodos analíticos gozaron durante el siglo XVIII se puso también de manifiesto en el hecho de que casi todos los matemáticos contemporáneos de Euler se ocuparon preferentemente de análisis y no de geometría. En este sentido es una excepción el francés Alexis-Claude Clairaut, que aún adolescente se ocupó de las “líneas de doble curvatura”, es decir nuestras curvas alabeadas. El nombre de doble curvaturas provenía del hecho de que esas curvas se estudiaban mediante sus proyecciones, con sendas curvaturas distintas. La obra más importante de Clairaut es Théorie de la *Figure de la Terre, tirée des Principes de I'Hysgrostatique* (1743), en la que se establecen las condiciones matemáticas para el equilibrio de los fluidos y se sientan los fundamentos de la futura teoría del potencial. Esa obra se fundaba en una de Maclaurin sobre la atracción de los elipsoides de revolución, y los métodos exclusivamente geométricos de Maclaurin indujeron a Clairaut figuran entre los últimos matemáticos que resuelven los problemas mecánicos y astronómicos *more geométrico*. Con D’Alembert, Euler, Lagrange y otros matemáticos de la época, Clairaut se ocupó del “problema de los tres cuerpos”, vinculando además su nombre con una ecuación diferencial cuya integración dio como la solución singular que comporta.

La “ecuación de Clairaut” es un caso particular de la ecuación llamada hoy de D’Alembert, contemporáneo y en cierto modo rival de su compatriota Clairaut. Jean-Le Rond D’Alembert fue el autor del Discurso preliminar y de numerosos artículos matemáticos de la gran Enciclopedia, en los que se ocupó también de cuestiones metodológicas y de los fundamentos del cálculo infinitesimal. Su contribución más importante fue en el campo de las ecuaciones con derivadas parciales, en el que dio la solución del “problema de las curvas vibrantes”, problema que adquirirá importancia en la futura revisión de los principios del análisis. (5)

Se ocuparon, en cambio, especialmente de algebra los franceses Etienne Bézout y Alexandre-Théophile Vandermonde. Al primero se deben métodos de eliminación y el teorema respecto del grado de la ecuación resultante de un número cualquiera de ecuaciones. Vandermonde se ocupó de temas análogos; se lo considera un

precursor de la teoría de las sustituciones y fundador de la teoría de los determinantes.

Más originales en sus investigaciones aritméticas y algebraicas es el inglés Edward Waring quien, independientemente de Goldbach, afirmó que todo número par es suma de dos primos y todo impar no primo suma de tres números primos. También en forma de conjetura expresó el teorema relativo a la descomposición de todo número en suma de potencias de igual exponente, que no se resolvió hasta principios de este siglo. En sus escritos aparece un teorema de congruencias debido a su amigo John Wilson. Waring se ocupó de las transformaciones de ecuaciones y llevan su nombre las relaciones entre los coeficientes de una ecuación y las sumas de las potencias de igual exponente de sus raíces, y las relaciones inversas. En sus transformaciones aparece, como nueva incógnita, la diferencia de las raíces que más tarde utilizará Lagrange. Un hermoso teorema de Waring establece que el producto de los cuadrados de las raíces de una ecuación es proporcional al producto de los valores de la función para los ceros de la derivada. Se ocupó de la separación de las raíces, de la aproximación de raíces complejas, etcétera; se encuentra entre sus escritos, poco leídos por sus contemporáneos dada su oscuridad, el criterio del cociente para la convergencia de las series y la fórmula de interpolación que luego dará Lagrange.

También se ocupó de álgebra, aunque en vista en especial de su utilización en el estudio de las curvas planas, Gabriel Crámer quien estudia sistemáticamente las curvas referidas en cada caso a un sistema adecuado de ejes de referencia. En la determinación de los coeficientes de la ecuación de una curva algebraica, conociendo un número suficiente de sus puntos, da la regla conocida por su nombre en la resolución general de sistemas lineales. En el estudio de las curvas utiliza las series para la investigación de los puntos singulares.

Por último, mencionemos al alsaciano Johann Heinrich Lambert, científico que se ocupó de diversas ramas del saber. En matemática se le deben investigaciones, desde la perspectiva hasta el simbolismo lógico, tema este último en el cual siguió las huellas de Leibniz. Se ocupó de funciones hiperbólicas en conexión con estudios vinculados con la teoría de las paralelas, demostró la

irracionalidad de π partiendo del desarrollo en fracción continua de $\tan x$ y se ocupó de cartografía y de cálculo actuarial. Se destaca entre sus trabajos puramente analíticos el desarrollo en serie de las raíces de una ecuación binomia y la "serie de Lambert", en la cual cada coeficiente da el número de divisores del exponente, de manera que todas las potencias de exponente primo tienen por coeficiente el número 2.

Todos estos matemáticos nacieron y murieron en el siglo XVIII, que fue el siglo de Euler; la generación siguiente es la de Lagrange y es la generación que asiste a la Revolución francesa.

Notas complementarias

(1) La identidad de Euler para los números primos. El procedimiento mediante el cual Euler llega a esa identidad puede dar idea de los métodos eulerianos. Parle de series de la forma

$$\frac{1}{1-\alpha z} = 1 + \alpha a + \alpha^2 z^2 + \alpha^3 z^3 + \cdots$$

y multiplica miembro a miembro estas series para $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{3,} \ldots$

$$\underset{r}{\pi} \frac{1}{1-\alpha, z} = 1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots)z + (\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + \cdots)z^2 + (\alpha_1^3 + \alpha_1^2\alpha_2 + \cdots)z^3 + \cdots$$

Si se supone ahora que los α son números primos, en los paréntesis del segundo miembro aparecerá, una y sólo una vez, cada número entero n en virtud de la descomposición única de todo número en producto de factores primos. Lo mismo ocurrirá si en lugar de tomar los números primos se toman sus recíprocos o una potencia cualquiera de esos recíprocos. En definitiva para $z = 1$:

$$\underset{p}{\pi} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1} \frac{1}{n^s}$$

donde el producto se extiende a la sucesión indefinida de los números primos p. El segundo miembro para S complejo, constituye la llamada función ζ de Riemann, con la cual puede demostrarse rigurosamente la identidad anterior debida a Euler.

(2) Las fórmulas de Euler. Para Leibniz, que no tenía una idea muy clara de los números imaginarios, no existían logaritmos de números negativos pues de existir, dada, la mitad del logaritmo de (-1) sería $\log\sqrt{-1}$; es decir de algo inexistente. En cambio, para Johann Bernoulli $\log(-1) = 0$, pues, según él, $\log x = \log(-x)$ en vista de que la diferencial del logaritmo $\frac{dx}{x}$ mantenía su valor cambiando de signo a la variable. Además, agregaba, que si $\log(-1) = h$ de la igualdad $(-1)x = \frac{x}{-1}$ se deducía $h = 0$. En su discusión con Bernoulli, Euler mostró que h no podía ser 0 pues la integral $\int \frac{dz}{z^2+b^2}$, que entre 0 y b tenía por valor el cuadrante de círculo de diámetro *1/b*, mediante la transformación $z = \frac{t-1}{t+1} b\sqrt{-1}$ daba por resultado $\frac{b}{2\sqrt{-1}}$. Por otro lado, Euler observa que las expresiones $2\cos x$ y $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$ tenían igual desarrollo en serie y que ambas satisfacían la ecuación diferencial $y'' + y = 0$.

Por último, logró la demostración de la multiplicidad de la función logarítmica considerando que si $l \cdot x = y$, para n, infinito será $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = x$; por tanto si $y = nh$ se tendrá, para n infinito y h cero, $x = (1 + h)^n$; $h = \sqrt[n]{x - 1}$; $l \cdot x = n\left(\sqrt[n]{x - 1}\right)$, como toda raíz tiene tantos valores como indica el índice, el logaritmo tendrá infinitos valores.

Para determinarlos, llama k al logaritmo de -1, de manera que para $x = -1$ puede escribir $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n + 1 = 0$.

En su *Introductio* Euler había demostrado que una suma de potencias de la forma $p^n + q^n$ tenía como factor el trinomio

$$p^2 - 2pq\cos\frac{2m-1}{n}\pi + q^2$$

Como $p^n + q^n = 0$, la anulación del trinomio anterior daba

$$p = q\left(\cos\frac{2m-1}{n}\pi \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2m-1}{n}\pi\right)$$

que aplicada al caso particular en el cual $p = 1 + \frac{k}{n}$; $q = 1$, se obtiene

$$1 + \frac{k}{n} = \cos\frac{2m-1}{n}\pi \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2m-1}{n}\pi$$

y, finalmente, para n infinito, $k = \pm\sqrt{-1}(2m-1)\pi$ y la multiplicidad del logaritmo queda probada. Mediante su expresión del logaritmo de *-1* Euler dio más tarde valores como el siguiente:

$$1^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}2078795763$$

Aunque sin aludir a los demás valores de la misma expresión.

(3) Una curva trascendente de Euler. He aquí un ejemplo de curva trascendente que Euler expresa en forma paramétrica. Parte de la ecuación $x^y = y^x$, ecuación que transforma, en primer lugar mediante la sustitución $y = tx$, que da $t = x^t$, y luego con la nueva transformación $t = 1 + \frac{1}{u}$ que permite escribir su ecuación en la forma paramétrica $x = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$; $y = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}$.

(4) Las contribuciones de Euler. Es materialmente imposible reseñar las innovaciones introducidas por Euler en los campos del cálculo infinitesimal, de la geometría, de la trigonometría y de la topología. Citemos las más importantes de ellas en ese orden.

a) Las dos integrales definidas, que más tarde Legendre llamó eulerianas de primera y de segunda especie o funciones B (beta) y Γ (gamma), las dedujo Euler: la primera, tratando de generalizar la fórmula de Wallis y llegando en estas investigaciones hasta definir derivaciones de orden fraccionario; la segunda, al estudiar ciertas integrales definidas que se le presentaron en un problema geométrico.

b) La llamada constante de Euler o de Mascheroni, apareció en sus estudios de la serie logarítmica, en conexión con las series que llamó armónicas.

Para llegar a esa constante, Euler parte de la serie logarítmica

$$l \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \cdots$$

Sumando sus resultados para n = 1, 2, 3,… m se llega a la expresión

$$l \cdot (m+1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{m^2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} \ldots \frac{1}{m^3}\right) - \cdots$$

Cuando m tiende a infinito, cada uno de los paréntesis del segundo miembro tiende a un valor finito, que por lo demás Euler sabía calcular, de ahí que la diferencia $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{m} - l \cdot (1+m)$ tiende para $m \to \infty$ a una constante, la "constante de Euler o de Mascheroni, que se designa generalmente con G y que se conoce con numerosos decimales, los primeros de los cuales son 0,57721566… Euler dio también una expresión de esta constante en la que intervienen los "números de Bernoulli".

c) La serie de los recíprocos de los números primos es un infinito equivalente a $log \cdot \log n$.

d) Desarrollo en serie de $\frac{1}{\cos x}$, en cuyos coeficientes aparecen los llamados “números de Euler”.

e) La serie hipergeométrica, más tarde estudiada por Gauss.

f) Estudio de una nueva trascendente, hoy denominada logaritmo integral, $\int \frac{dx}{l \cdot x}$.

g) Desarrollo en serie, mediante un método ingenioso, de las infinitas soluciones de la ecuación trascendente $\tan x = x$.

h) Demostración de la alineación de los puntos intersecciones de las tres alturas, las tres medianas y las tres mediatrices de un triángulo (recta de Euler).

i) Introducción de las coordenadas intrínsecas para el estudio de las curvas planas y fórmula de la curvatura de las secciones normales que pasan por un punto de una superficie.
j) Jobo Machin había dado en 1706 la expresión $\frac{\pi}{4} = 4arctg\frac{1}{5} - arctg\frac{1}{239}$ que, desarrolla en serie, le permite calcular π con 100 decimales. (Con esta fórmula William Shanks dio en 1874 el valor de π con 707 cifras. Actualmente con las computadoras ese número alcanzó al par de millares). Euler generalizó la fórmula de Machin y dio numerosos desarrollos en serie del número π mediante la serie del arco tangente.
k) Enunciado y posterior demostración de la relación fundamental entre las caras, vértices y aristas de un poliedro (simplemente conexo).
l) Solución del "problema de los puentes de Königsberg" cuyo enunciado es: El rio Pregel atraviesa la ciudad de Königsberg formando dos islas que se unen entre sí y con tierra firme mediante siete puentes. ¿Es posible pasar sucesivamente por todos esos puentes cruzándolos una sola vez? (Euler probó que no es posible).

(5) La ecuación de D'Alembert. En el "problema de la cuerda vibrante" se presenta una ecuación con derivadas parciales de segundo orden de la forma $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que mediante la trasformación $at = y$ se convierte en $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
D'Alembert dio con la integración de la ecuación en 1747. Si $\frac{\partial u}{\partial x} = p\,\frac{\partial u}{\partial y} = q$, se tendrá, por un lado, $du = p\,dx + q\,dy$ y, por el otro, en virtud de la ecuación $\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}$, $dv = q\,dx + p\,dy$ será una diferencial exacta. En definitiva $d(u + v) = (p + q)d(x + y)$; $d(u - v) = (p - q)d(x - y)$ o, lo que es lo mismo, $u + v = 2\phi(x + y) u - v = 2\psi(x - y)$ con ϕ y ψ funciones arbitrarias, de donde se deduce finalmente

$$u = \phi(x + at) + \psi(x - at)$$

reconociendo D'Alembert que “las funciones arbitrarias se reducen a una sola si, por las condiciones iniciales del problema, u se anula para $x = 0$ y $x = 1$.

Por su parte Daniel Bernoulli, generalizando una solución particular dada por Taylor, mostró que la solución general de la ecuación diferencial dada era una suma de términos de la forma

$$a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi t}{j} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots .)$$

Solución a la que se oponía Euler, pues en ese caso una suma de términos representaría la ecuación de una función arbitraría.

El siglo de oro de los matemáticos franceses

La preferencia por los métodos analíticos, característica del siglo XVIII, se acentúa en Lagrange, creador de la "mecánica analítica" concebida como una rama de la matemática.

Joseph-Louis Lagrange, de origen francés pero nacido en Italia, residió desde los 30 años en Berlín y en París. Con sus escritos contribuyó a dotar a las ramas analíticas de la matemática de esa generalidad que las caracteriza, mientras las aplica a los más variados problemas de mecánica, de astronomía, de probabilidades. Los primeros trabajos de Lagrange aparecieron en la *Miscellanea Turinensia*, publicación periódica de una sociedad científica de Turín, que Lagrange contribuyó a fundar en 1757 y que luego se convirtió en la Academia Real de esa ciudad. En esos trabajos Lagrange reorganiza el "cálculo de las variaciones", independizándolo de las consideraciones geométricas que le habían dado nacimiento (el problema de los isoperímetros), y confiriéndole mayor generalidad.

En teoría de números Lagrange se ocupó de numerosos problemas: análisis indeterminado de primero y segundo grado, demostración del teorema de Wilson y de que todo número es siempre suma de cuatro cuadrados, etcétera.

Los estudios de Lagrange sobre la teoría de las ecuaciones algebraicas son precursores de la futura teoría de grupos. Utilizó

tanto en álgebra como en análisis el algoritmo de las fracciones continuas infinitas. Mediante la hoy llamada "fórmula de Lagrange" dio un método para desarrollar en serie la raíz de una ecuación algebraica o trascendente. (1)

En cuanto a la conocida "fórmula de interpolación de Lagrange" apareció en una memoria de astronomía de 1792, pero volvió a publicarse en trabajos posteriores.

En análisis se ocupó en especial de funciones de varias variables y de ecuaciones con derivadas parciales; le pertenece el método de integración de ecuaciones diferenciales lineales llamado de la "variación de las constantes".

La aplicación de las fracciones continuas a la integración de ecuaciones diferenciales le permitió expresar, mediante una fracción continua infinita, gran parte de las funciones elementales. Lagrange introdujo el cálculo simbólico en el cálculo infinitesimal, llegando de manera puramente simbólica a la fórmula sumatoria de Euler.

En 1797, estando Lagrange en París, se fundó en esa ciudad la École Polytechnique, de la cual fue profesor durante algunos años. Como resultado de sus cursos publicó la *Théorie des fonctions analytique*, de 1797, aunque la idea fundamental que la informa pertenece a una memoria de 1772, y *Leçons sur le calcul des fonctions* (1801), tratados en los que expone los principios del cálculo infinitesimal de manera original, aunque no rigurosa.

Con el propósito de evitar los infinitamente pequeños o los incrementos evanescentes, y, al mismo tiempo, independizarlo de toda consideración geométrica o mecánica, funda ese cálculo de manera algebraica tomando como fórmula fundamental la serie de Taylor. Fundado sobre tal desarrollo algebraico denomina "derivadas" (este nombre proviene de Lagrange, así como la notación mediante ápices) a los coeficientes de aquél y con esas "derivadas" desarrolla el cálculo en forma finita. En cuanto al cálculo integral, lo considera inverso del cálculo de derivadas. (2) Aunque tal "método de derivadas" no es riguroso (el fundamento está sin fundamentar) fue mérito de Lagrange haber asignado al teorema de Taylor la importancia que tiene en el análisis. Por lo demás, se le deben dos formas del resto de la fórmula de Taylor, mediante las derivadas y mediante las integrales.

Un intento semejante al de Lagrange, de eliminar los infinitésimos y los límites, se debe al inglés John Landen quien, mediante un "análisis de restos", trató de definir las derivadas dividiendo los incrementos y anulando en el cociente el incremento variable. Este método, tan poco riguroso como el de Lagrange, era en cambio más engorroso. Más importantes son algunas investigaciones de Landen sobre las integrales elípticas.

El "método de derivadas" de Lagrange no dejo de encontrar objeciones entre sus contemporáneos, aunque pasaran inadvertidas hasta la época de Cauchy. Entre los opositores cabe citar al polaco Hoëné Wronski, que se ocupó de numerosas cuestiones de análisis. Hoy se designan con el nombre de "wronskianos" ciertos determinantes funcionales. Pero en verdad la matemática técnica no tenía para Wronski mayor importancia frente a las ideas y el sistema filosófico subyacente, que expuso en numerosas obras, una de las cuales es una refutación a la teoría de las funciones analíticas de Lagrange. Del mismo modo, criticará más tarde las funciones generatrices de Laplace. Es menos en nombre del rigor que en nombre de ese sistema general y metafísico que Wronski, que no deja de ser un buen algorítmico, refuta las pretensiones de Lagrange, quien en su *Théorie* había sostenido que ella "contiene los principios del cálculo diferencial desprovista de consideración de infinitamente pequeños, de evanescentes, de límites y de fluxiones, y reducida al análisis algebraico de cantidades finitas".

La *Mécanique Analytique* de Lagrange, de 1788, es una obra que hizo época. En ella la mecánica se considera, más que una ciencia natural, una geometría de cuatro dimensiones (la cuarta dimensión es el tiempo). Partiendo del principio de las velocidades virtuales y utilizando el cálculo de variaciones, se erige el sistema íntegro de la mecánica, donde aparecen el concepto de potencial y el principio de acción mínima, se introducen las coordenadas generalizadas, etcétera. En 1810 Lagrange inició una prolija revisión de su *Mécanique*, pero la muerte impidió completarla.

Obra semejante a la cumplida por Lagrange en mecánica, desarrolló Pierre Simon Laplace en astronomía. Su *Mécanique celeste* (cinco volúmenes aparecidos entre 1799 y 1825) comprenden todos los descubrimientos realizados por Newton,

Clairaut, D'Alembert, Euler y Laplace mismo, sobre la mecánica del sistema solar expuestos en forma totalmente analítica, sin más datos de observación que los indispensables. Aún antes de la publicación de la Mécanique, Laplace había abordado el problema del origen del sistema solar, que expuso en un tratado de divulgación con un apéndice sobre la historia de la astronomía: *Exposition du système du monde*, de 1796, donde aparece la concepción conocida con el nombre de "hipótesis de la nebulosa" o "hipótesis de Kant y Laplace", para aludir a una hipótesis cosmogónica, semejante a la de Laplace, que Kant habla expuesto en 1755.

Una contribución importante de Laplace a la matemática es el conjunto de investigaciones sobre el cálculo de probabilidades. En 1812 reunió todos sus estudios sobre el tema en su *Théorie analytique des probabilités,* cuya tercera edición de 1820 fue precedida por una introducción (que también se publicó separadamente) con el título *Essai philosophique sur des probabilités,* en el que se expone la teoría sin fórmulas matemáticas escritas. En *Théorie* Laplace expone la teoría de las funciones generatrices: son las funciones que desarrolladas en serie de potencias tienen por coeficientes las familias de números o defunciones, de los que es generatriz la función desarrollada. En el tratado teórico se utilizan los recursos del cálculo infinitesimal, se introduce el principio de los cuadrados mínimos y se analizan todos los problemas y las contribuciones de los autores anteriores. Así se estudia, entre otros, el teorema de Bayes sobre la "probabilidad de las causas", enunciado en una memoria póstuma de Thomas Bayes, y el problema "de la aguja", propuesto y resuelto por Buffon en 1777.

Laplace es un matemático profundo, difícil de leer, pues da los resultados sin exponer las etapas para llegar a ellos, acompañadas a veces con un atormentador "il est facile de voir". Entre sus contribuciones originales pueden citarse la generalización de las funciones esféricas, introducidas por Legendre, y la generalización de la integral euleriana de segunda especie. En sus estudios astronómicos utilizó el potencial (el nombre es de Green) introducido por Lagrange, dando la ecuación de segundo orden con derivadas parciales, hoy llamada de Laplace o Laplaciana, a que

satisface la función potencial, y que para dos variables ya era conocida por D'Alembert. Se le deben además métodos de resolución de ecuaciones, de desarrollo de determinantes, de aproximación de integrales definidas, etcétera.

De méritos ponderables, aunque inferiores a los de Lagrange y Laplace, es el contemporáneo de ambos Aldrien Marie Legendre, último de los grandes analistas del tipo de Euler o Lagrange, que alcanzó a conocer y reconocer los méritos del nuevo grupo de analistas del siglo XIX del tipo de Abel y Jacobi.

Las contribuciones más importantes de Legendre se refieren a la teoría de números y al cálculo integral. Sus investigaciones en el primer campo aparecen, en su forma más desarrollada, en *Théorie des nombres* de 1830, donde estudia la teoría de los números primos, las ecuaciones indeterminadas, los restos potenciales. En ella aparece demostrada, por primera vez (Euler la había enunciado sin demostración), la ley de reciprocidad de los restos cuadráticos, esa "joya de la aritmética", como la calificó Gauss. En los *Exercices de Calcul Integral*, cuya primera edición es de 1812, Legendre se ocupa de las integrales eulerianas y de las integrales elípticas (3), expresiones que hacen así su aparición en matemática y que, por inversión, dieron lugar a las llamadas funciones elípticas, de manera que Legendre publicó una nueva edición de su obra, con el título de *Traité des Fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes* (1827-1832), dando cabida en ella a las investigaciones de Abel y Jacobi.

En sus estudios sobre la atracción de un elipsoide de rotación aparecen los polinomios P_n, hoy llamados de Legendre, que Laplace generalizó (son las llamadas funciones esféricas) y de los que Legendre dio algunas propiedades, por ejempló que constituyen una familia de funciones ortogonales.

Mucho éxito tuvieron sus *Éléments de géométrie* de 1794, que se editaron repetidas veces y fueron adoptados como texto en el continente y en los Estados Unidos. Con Legendre aparece en la geometría el tratamiento de los teoremas previo al de los problemas, mientras que en Euclides ocurre lo contrario, así como la geometría adquiere esa fisonomía entre algebraica y geométrica que caracterizó a la geometría elemental desde entonces. En un *Apéndice* trae notas con algunas novedades: la trigonometría, la

distancia mínima entre dos rectas no coplanares, la demostración de la irracionalidad de π y de e, con la observación profética de que "es probable que el número π no esté comprendido entre los irracionales algebraicos, es decir que no sea raíz de una ecuación algebraica de un número finito de términos y de coeficiente racionales". Agreguemos que en conexión con las cuestiones de geometría elemental, Legendre se ocupó también del postulado de las paralelas.

Otro matemático de este período que, además de ocuparse de análisis (ya mencionamos la constante que lleva su nombre unido al de Euler) se ocupó también de geometría elemental es Lorenzo Mascheroni, quien en 1797 publicó una *Geometría del Compasso*, donde prueba que todas las construcciones con regla y compás pueden realizarse con compás únicamente (sin radio fijo). En general supone dado el centro, aunque expone una construcción con compás únicamente para determinar el centro de una circunferencia dada. Las construcciones de Mascheroni son ingeniosas (4) y el autor sostiene que esas construcciones son más exactas que las hechas con regla y compás. En realidad no fue Mascheroni el primero que se ocupó de este tema en forma detallada, pues el danés Georg Mohr (=Mohrendal) había publicado en 1672 un *Euclides danicus*, donde figuran los mismos resultados, pero este escrito no se difundió hasta 1928.

El estado del cálculo infinitesimal a fines del siglo XVIII se pone de manifiesto en el gran tratado de otro francés, Sylvestre François Lacroix, el *Traité de Calcul Différentiel et lntégral* en tres gruesos volúmenes aparecidos entre 1797 y 1800. El primer volumen se refiere al cálculo diferencial y a sus aplicaciones geométricas. Aunque utiliza el método de Lagrange no excluye el uso de límites. En las aplicaciones geométricas hace su aparición la expresión "geometría analítica". "… He deseado mostrar a los lectores que existe una manera de enseñar la geometría analítica, que consiste en deducir las propiedades de la extensión del menor número de principios y por procedimientos puramente analíticos como lo hizo Lagrange…". También aparece el estudio de las curvas mediante las coordenadas intrínsecas, "… cantidades absolutamente inherentes a la curva propuesta".

El segundo volumen, dedicado al cálculo Integral con cálculo de variaciones, trae la distinción entre integral definida e indefinida y las definiciones respectivas. El tercer volumen se ocupa exclusivamente de diferencias y de series.

Se debe también a Lacroix una colección de obras didácticas de matemática que incluye todas las ramas de esta ciencia y hasta un tratado de didáctica matemática. Entre estos tratados didácticos figura un *Traité élémentaire de Calcul différentiel et intégral,* que se tradujo al inglés en 1816, agregándosele en 1820 dos volúmenes de ejercicios.

Esta traducción significó el fin del ostracismo de los analistas ingleses y el abandono de la notación fluxional, adoptándose la notación y los métodos de los matemáticos continentales. Los traductores del Lacroix y promotores del movimiento fueron los tres jóvenes ya mencionados que en 1813 fundaron en Cambridge la "Analytical Society": John F. W. Herschel, hijo del célebre astrónomo y astrónomo él mismo, aunque se ocupó también de matemática; Charles Babbage, conocido por sus inventos de máquinas analíticas, y George Peacock, probablemente el más matemático del grupo. (5)

Notas complementarias

(1) La fórmula de Lagrange. Con su fórmula Lagrange se propone desarrollar en serie, en función de a y de h, el valor de x que satisface a la ecuación $x = a + hF(x)$. Suponiendo variables todas las letras, por diferenciación obtiene $dx(1 - hF') = da + F\,dh$ e introduciendo una función cualquiera $u = f(x)$; $du\,(1 - hF') = f\,(da + F\,dh)$, donde con ápices indicamos las derivadas. Mediante la fórmula de la diferencial total de du se llega a $\frac{\partial u}{\partial h} = F\frac{\partial u}{\partial a}$, válida por supuesto también para $u = F(x)$.

La relación anterior entre derivadas parciales es el caso $n = 1$ de la expresión $\frac{\partial^n u}{\partial h^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(F^n \frac{\partial u}{\partial a}\right)$ cuya validez general demuestra Lagrange por inducción completa. En efecto, de la diferenciación

$$\frac{\partial}{\partial h}\left(F^n \frac{\partial u}{\partial a}\right) = F^n \frac{\partial^2 u}{\partial h\, \partial a} + nF^{n-1} \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial F}{\partial h} =$$

$$= F^n \frac{\partial}{\partial a}\left(F^{n+1} \frac{\partial u}{\partial a}\right) + nF^n \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial F}{\partial a} =$$

$$= F^{n+1} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + (n+1)F^n \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial F}{\partial \partial a} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial a}\left(F^{n+1} \frac{\partial u}{\partial a}\right)$$

De manera que si la expresión general es válida para n, al derivarla respecto de h y tener en cuenta el resultado anterior

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial h^{n+1}} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\frac{\partial}{\partial h}\left(F^{n+1} \frac{\partial u}{\partial a}\right) =$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(F^{n+1} \frac{\partial u}{\partial a}\right)$$

Y la expresión es válida para $n + 1$.

Para $h = 0$ ese factor será el coeficiente del desarrollo en serie de $f(x)$ en las proximidades de $x = a$, donde $h = 0$, tal valor es

$$\left[\frac{\partial^n u}{\partial h^n}\right]_{h=0} = D^{n-1}(F(a)^n f'(a))$$

donde D significa derivación ordinaria respecto de a, de manera que en definitiva

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1} \frac{h^n}{n!} D^{n-1}(F(a)^n f'(a))$$

que es la fórmula de Lagrange, que éste aplica a distintos ejemplos, entre ellos la ecuación de Kepler $x = a + e\ \sin x$, dando el valor de la incógnita en la serie

$$x = a + e\sin a + \frac{e^2}{2}D\sin a^2 + \frac{e^3}{3!}D^3\sin a^3 + \cdots$$

dando además un límite superior de e que asegure la convergencia.

(2) Las "derivadas" de Lagrange. Puede tenerse una idea del "método de las derivadas" de Lagrange, reseñando algunas de sus demostraciones de ese método.

a) Derivada de función de función. Si $y = f(F(x))$, se tendrá, llamando como Lagrange i al incremento de la variable,

$$F(x+i) = F + iF' + \frac{i^2}{2}F'' + \cdots$$

Como por otra parte

$$y + iy' + \frac{i^2}{2}y'' + \cdots = f\big(F(x+i)\big) =$$

$$f\left(F + iF' + \frac{i^2}{2}F'' + \cdots\right) =$$

$$= f(F) + \left(iF' + \frac{i^2}{2}F'' + \cdots\right)f' + \frac{1}{2}\left(iF' + \frac{i^2}{2}F'' + \cdots\right)^2 f'' + \cdots$$

por tanto, comparando el primero y último miembro, se obtiene el resultado $y' = f'F'$.

b) Regla de l'Hôpital. Para calcular el valor de la función $y = \frac{f(x)}{F(x)}$ para $x = a$ cuando $f(a) = F(a) = 0$, Lagrange deriva el producto $yF(x) = f(x)$ y de $y'F(x) + yF'(x) = f'$ obtiene, para $x = a, y = \frac{f\prime}{F\prime}$.

c) Problema inverso de la tangente. Si $y = f(x)$ representa una curva que encierra el área $F(x)$, el valor de $F(x+i) - F(x)$ estará comprendido entre $if(x)$ e $if(x+i) = if(x) + i^2 f'(x+j)$, utilizando el teorema del valor medio que vuelve a utilizar en $F(x+i) = iF'(x) + \frac{i^2}{2}F''(x+k)$ por tanto, dividiendo por i, $F'(x) + \frac{1}{2}F''(x+k)$ debe estar comprendido entre $f(x)$ y $f(x) + if'(x+j)$, lo que exige que $F'(x) = f(x)$.

(3) Las integrales elípticas de Legendre. Después de haber conocido los trabajos de Fagnano, Euler y Landen, Legendre demuestra que toda integral en la que aparece un irracional cuadrático de un polinomio de cuarto grado, se puede llevar a la forma

$$\int \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}\sin\varphi^2}{1 + n\ \sin\varphi^2}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} \quad donde\ \Delta(\varphi) = \sqrt{1 - c^2\sin\varphi^2}\ ;(c < 1)$$

Que a su vez puede reducirse a una combinación de una o más de estas formas típicas, las formas canónicas de Legendre;
Integral elíptica de primera especie

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

Integral elíptica de segunda especie

$$\int \Delta(\varphi)d\varphi$$

Integral elíptica de tercera especie

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + n\ \sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}$$

Integrando entre 0 u θ, y haciendo $c = \sin\alpha$, Legendre calculó, para α y θ de grado en grado, los valores de las integrales de primera y segunda especie con 9 y 10 decimales. Entre las propiedades estudiadas por Legendre figuran las relativas a la suma de las integrales elípticas para dos valores distintos de la amplitud θ.

(4) Una construcción de Mascheroni. Sea bisecar, con compás únicamente, el arco *AB* de la circunferencia de centro *O*. Con centros en *A* y en *B* se trazan los arcos *OC* y *OD*, tomando sobre ellos puntos *C* y *D* tales que *OC* = *OD* = *AB*. Con centros en *C* y en *D* y radio *AC* = *DB* se trazan los arcos *AE* y *BE*, que determinan el punto *E*. Nuevamente con centros en *C* y en *D*, pero ahora con radio *OE*, se trazan dos arcos que determinan sobre la circunferencia el punto *M* que será el punto medio del arco *AB.* En efecto, sean *2c* y *f* la cuerda de *AB* y su distancia al centro. El segmento *AC* será

hipotenusa de un triángulo de catetos *f* y *3c (OC + ½ OD),* por tanto $AC^2 = 9c^2 + f^2 = CE^2 = 4c^2 + OE^2$; $OE^2 = 5c^2 + f^2 = CM^2 = 4c^2 + OM^2$; $OM^2 = c^2 + f^2 = r^2$, siendo *r* el radio, por tanto el punto *M* está sobre la circunferencia y por la simetría de la figura será el punto medio de *AB*.

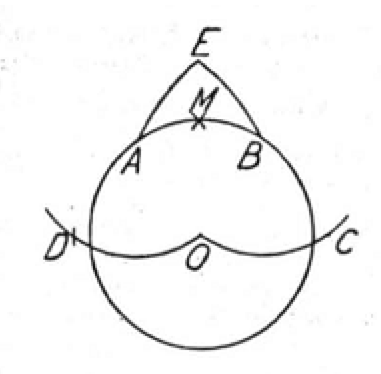


Fig. 42

(5) El "*Álgebra*" de Peacock. *A treatise on Álgebra* (1830, segunda edición en dos volúmenes, 1841-1842) es una obra importante, en la que se estudian los fundamentos del álgebra y se acentúa su carácter simbólico. Con el nombre de "principio de permanencia de las formas equivalentes" enuncia un principio que anticipa el futuro "principio de permanencia de las leyes formales" de Hankel, de 1867, que constituyó el principio director del análisis algebraico. El tratado de Peacock incluye, además, todos los progresos realizados hasta entonces en el campo del álgebra, agregando "aplicaciones a la geometría de posición", es decir, la trigonometría. Comprende aritmética, combinatoria, teoría de números, algoritmo algebraico, expresiones imaginarias, teorema del binomio, raíces de la unidad, aplicaciones de la fórmula de De Moivre, series exponencial y logarítmica y de las funciones circulares, logaritmos, descomposición en fracciones parciales, eliminación, ecuaciones de tercero y de cuarto grado. En el apéndice menciona el trabajo de Abel sobre la imposibilidad de resolver las ecuaciones algebraicas de grado superior al cuarto, y lo comenta con algún escepticismo.

El renacimiento de la geometría y el nacimiento de la física matemática.

"… Hoy la geometría no está de moda, y para pasar por científico hay que hacer ostentación del análisis", se expresa con cierta melancolía Amédée François Frézier, uno de los pocos autores que se ocuparon de geometría en la primera mitad del siglo XVIII. Su *Traité de Stérétomie a l'usage de l'Architecture* de 1737, no obstante su finalidad práctica, estudia en forma científica las curvas situadas sobre las superficies y los métodos para representar los sólidos y sus curvas sobre un plano.

Pero a fines de siglo la geometría pura vuelve por sus fueros y mientras continúa siendo estudiada con los recursos del análisis, nacen nuevas ramas de la geometría en las que el análisis no tiene ya cabida. Tal es el caso de la geometría descriptiva, que nace ya con este nombre en 1795, gracias a los esfuerzos de Gaspard Monge y en la que se da unidad y jerarquía científica a aquella serie de procedimientos nacidos hacia fines del siglo XV para otorgar a los artistas y arquitectos normas para la mejor realización de sus obras. En su *Géométrie Descriptive*, Monge utiliza el método que lleva su nombre con el cual pueden representarse en un plano las curvas, las superficies y sus relaciones mutuas, mediante dos proyecciones ortogonales de aquellas sobre dos planos perpendiculares entre sí, método que, como dijimos, tiene un lejano precursor en Dürer.

Con su método, Monge estudia en su tratado los principales problemas gráficos concernientes a los puntos, rectas, planos, superficies cónicas, cilíndricas, de rotación y regladas. Pero no se limitó a representar las curvas y superficies mediante su método de proyección, sino que utilizó los recursos del análisis para estudiar nuevas propiedades de las figuras geométricas, invirtiendo en cierto modo el proceso de la época que consistía en tomar figuras como pretextos para estudios analíticos.

Tales estudios de Monge, que inauguran la llamada "geometría diferencial", y los que dedicó en especial a las curvas alabeadas y a las superficies desarrollables, aparecieron en sus *Feuilles d'Analyse*

appliquée a la Géornétrie de 1809, título que cambió en ediciones posteriores.

Monge fue un gran maestro, de manera que un numeroso grupo de discípulos continuó su obra. Así, Jean-Baptiste Meusnier, a quien se debe el teorema que hoy lleva su nombre acerca de la relación entre la curvatura de una sección oblicua y la sección normal en un punto de una superficie. Así, Charles Dupin que al seguir las huellas de su maestro estableció una nueva teoría de la curvatura de las superficies. Así, Charles J. Brianchon que, solo o en colaboración con Poncelet, se ocupó de las cónicas en cuyo estudio dejó un teorema que lleva su nombre correlativo del de Pascal.

Discípulo de Monge fue también Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot, que además de sus actividades civiles y militares, se ocupó de matemática. En 1797 hizo conocer su obra *Réfléxions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*, donde entre otras reflexiones aparece la inconsistente tesis, ya esgrimida por Berkeley, de que si, no obstante sus imperfecciones, los conceptos infinitesimales no conducen a resultados erróneos, se debe a que los errores que se cometen se compensan y se anulan. Luego Carnot se dedicó a la geometría y publicó *De la correlation des figures de Géométrie* (1801) y *Géométrie de position* (1803), aunque en estos títulos los términos "correlación" y "geometría de posición" no tienen el significado geométrico que luego se les asignó. En estos dos trabajos Carnot intenta, sin lograrlo, introducir un algoritmo capaz de representar al mismo tiempo la posición y la magnitud de las figuras, mediante interpretaciones de signos. Más feliz es con su *Essai sur la théorie des transversales* (1806) donde aparece el concepto de "cuadrilátero completo" y el importante resultado: un conjunto de *n* rectas en un plano o una poligonal alabeada de *n* lados o una poligonal esférica de *n* arcos de círculo máximo puede considerarse como una curva de orden *n*. Cabe decir que con Carnot se inicia el estudio de las propiedades generales de las figuras que iba a constituir muy pronto el nuevo cuerpo de doctrina geométrica denominado "geometría proyectiva".

En tal sentido, y por su vinculación con la escuela de Monge, debe citarse a Jean Victor Poncelet que, al regresar a Francia después de varios años de cautiverio en Rusia, hizo conocer en 1820 su *Essai sur les propriétés projectives des sections coniques*,

que dos años después reprodujo ampliado como *Traité des propriétés projectives des figures.*

La definición de Poncelet de las propiedades proyectivas como aquellas propiedades que se conservan cuando la figura se somete a proyecciones y secciones, ya encierra los conceptos de invariancia de las propiedades gráficas que había creado Desargues, y que son fundamentales en la actual geometría proyectiva.

En su tratado Poncelet expone la teoría de la polaridad respecto de una cónica o de una cuádrica, la homología plana y su extensión al espacio con el nombre de “perspective relief”, y utiliza proyecciones centrales, ya no como hacia Monge según una dirección fija.

Como consecuencia de la teoría de la polaridad, de las “polares recíprocas”, como las llama Poncelet, aparece el "principio de dualidad" según el cual a cada propiedad geométrica entre ciertos elementos, corresponde otra propiedad, la llamada correlativa o dual, entre otros elementos. Así, en el plano a propiedades (gráficas) de los puntos corresponden propiedades de rectas y recíprocamente.

Poncelet utilizó en sus trabajos el "principio de permanencia o continuidad indefinida de las leyes matemáticas de las magnitudes variables por sucesiones insensibles", principio que, con el nombre de "principio de las relaciones contingentes", provenía de Monge y adoptó con Gergonne y Poncelet el poco adecuado de "principio de continuidad". Con este principio, ya aplicado parcialmente por Kepler y Desargues, se introducían en la geometría los elementos impropios y los imaginarios y se extendían las propiedades demostradas para elementos reales o propios a los casos en que esos elementos se convertían en imaginarios e impropios. Por ejemplo, las propiedades de los puntos de la secante común a dos circunferencias, el llamado "eje radical", se extendían sin más al caso en que la recta fuera tangente común o exterior a ambas circunferencias.

El "'Principio de dualidad", como el de "continuidad", motivaron polémicas y discusiones. El "principio de dualidad" motivó una controversia entre Poncelet y Joseph Díaz Gergonne respecto de su prioridad. En realidad Poncelet lo habla señalado en la polaridad;

Gergonne, que le dio el nombre, advirtió su alcance general, y es con Gergonne que se inicia la costumbre de disponer los teoremas correlativos en dos columnas. Un progreso resultante de la controversia fue la distinción entre orden y clase de una curva.

En cuanto al "principio de continuidad", Gergonne no le concedía sino un valor heurístico. Por lo demás, la Comisión relatora del *Essai* de Poncelet, que había presentado el trabajo al "lnstitut", formada por Cauchy, Poisson y Arago había manifestado sus dudas acerca de la aplicabilidad general del principio.

Además de su labor como geómetra, fue mérito indiscutible de Gergonne el de haber fundado y dirigido (aunque no fue un director ejemplar) la primera publicación periódica dedicada exclusivamente a la matemática: los "*Annales des Mathématiques*", más conocidos como los "*Annales de Gergonne*", aparecidos en Nimes desde 1810 basta 1832 y que durante casi 15 años fue la única revista matemática que se publicaba en el mundo. Cuando dejó de aparecer, ya el intento había dado sus frutos pues en la primera mitad del siglo XIX aparecieron las siguientes publicaciones periódicas consagradas parcial o totalmente a la matemática: "*Correspondence mathématique et physique*", aparecida en Bruselas entre 1824 y 1839, cuyo principal director fue Adolphe Quételet, matemático, astrónomo y estadígrafo; el célebre y más que centenario "*Journal fur reine und angewandte Mathematik*", más conocido como el "*Journal de Crelle*", fundado en Berlín en 1826 por el geómetra A. L. Crelle; el "*Journal de Mathématiques pures et appliquées*" que reemplazó en Francia a los "*Annales de Gergonne*", fundado por Joseph Liouville en 1836 ... Es imposible continuar la lista, a mediados de este siglo el número de periódicos que contienen artículos de matemática debe superar el millar, mientras que las sociedades matemáticas, que también comienzan a aparecer en la segunda mitad del siglo XIX, llegan al medio centenar.

Así como en los últimos años del siglo XVIII, por obra de Monge, la geometría adquiere nueva vida, en esa misma época y por obra de otro científico francés, Joseph Fourier, nace una nueva rama de la ciencia natural íntimamente vinculada con la matemática: la llamada física matemática, en la que siguiendo las huellas de Lagrange y de Laplace se estudian los problemas físicos mediante

los recursos del análisis infinitesimal con el mínimo indispensable de hipótesis físicas.

En este sentido la obra más importante de Fourier es su memoria de 1822, *La Théorie Analytique de la Chaleur*, algunos de cuyos resultados ya habían sido presentados en 1807. Con esa memoria entran en el análisis las series trigonométricas, hoy llamadas "series de Fourier" con la importante extensión del concepto euleriano de función, al admitir que mediante tales series pueden representarse funciones arbitrarias, y con la introducción de los primeros problemas en que la integral de una ecuación con derivadas parciales se fija mediante condiciones de contorno. (1) El punto débil del estudio de Fourier, que en esa época en verdad afectaba a todo el estudio de las series, es el que se refiere a su convergencia.

A otro capítulo de la matemática dedicó Fourier gran parte de su actividad científica: el estudio de las ecuaciones, cuyos resultados aparecieron en un tratado póstumo: *Analyse des equations determinées* de 1831. En este libro, entre otras cuestiones de aritmética y de álgebra exacta y aproximada, figura el ya mencionado perfeccionamiento del método de Newton para aproximar las raíces reales, en el que en verdad Fourier había sido adelantado por el académico marsellés J. Raymond Mourraille, quien lo había anunciado en 1768, y un método de separación de las raíces reales, aproximado; fundado en el teorema a veces llamado de Budan-Fourier, pues el médico francés F. D. Budan lo había enunciado sin demostración en 1807, época en la cual Fourier ya lo enseñaba a sus alumnos de la Politécnica.

Más cuando apareció el libro de Fourier el problema de la separación de las raíces reales estaba resuelto en virtud del teorema de Sturm, publicado en 1829 pero demostrado en 1835, por Jacques Charles F. Sturm, quien manifiesta que su descubrimiento es el resultado de las investigaciones de Fourier sobre el tema, que había conocido en manuscrito.

Se ocuparon de física matemática Jean-Baptiste Biot, autor de uno de los primeros textos de geometría analítica; Thomas Young y Augustin Fresnel, que aplicaron, en especial el segundo, el análisis matemático a la teoría ondulatoria de la luz, logrando imponerla frente a la corpuscular (mencionemos que con los estudios ópticos

de Fresnel se vinculan integrales que hoy llevan su nombre); André-Marie Ampère, célebre por sus investigaciones en el campo del electromagnetismo, aunque también se le deben contribuciones exclusivamente matemáticas; Sumeon Denis Poisson, que se ocupó de numerosas cuestiones de física matemática, así como de cálculo de variaciones, de diferencias finitas y de cálculo de probabilidades. Poisson extendió la ecuación de Laplace de la función potencial al caso en que el punto extraído por la masa sea un punto cualquiera y no un punto exterior, que fue el caso tratado por Laplace. El primero que aplicó la función potencial fuera de la gravitación, dándole este nombre y extendiéndola a problemas de electricidad y de magnetismo, fue George Green, a quien se debe la importante transformación de integrales, hoy denominada "teorema de Green", que hizo conocer en 1828, pero que por la escasa tirada del trabajo se difundió tan poco que el teorema fue redescubierto por otros, entre ellos Gauss, de ahí que a veces es con este nombre que se une el teorema. De los últimos físicos matemáticos nacidos en el siglo XVIII citemos a Gabriel Lamé que realizó contribuciones matemáticas en conexión con sus trabajos sobre la teoría del calor y de la elasticidad. Se le debe la introducción de las coordenadas curvilíneas, el estudio de una familia de curvas y de superficies que llevan hoy su nombre y se ocupó de teoría de números, demostrando el teorema de Fermat para $n = 5, 7$.

Nota complementaria

(1) Un problema de Fourier. Prescindiendo de la parte física, uno de los problemas del calor que trata Fourier consiste en determinar una integral de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$$

Que cumpla las siguientes condiciones:

Para cualquier y, $t = 1$ para $x = 0$;

Para cualquier x, $t = 0$ para $y = \pm\frac{\pi}{2}$;

$t = 0$ también para $x \to \infty$.

Fourier comienza considerando t de la forma $F(x)f(y)$, de donde $\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{f''(y)}{f(y)} = 0$ que exige, por ser x e y independientes, $\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{f''(y)}{f(y)}$ y constantes, de ahí que una integral de la ecuación esté representado por una serie de términos de la forma $a_m e^{mx}$ $\cos my$, de donde m y a_m son constantes a determinarse, de acuerdo con las condiciones de contorno.

La condición c) exige que m sea negativo y la b) que sea impar, de ahí que la solución sea de la forma $t = a_1 e^{-x} \cos\, y + a_3 e^{-3x} \cos\, 3y + a_5 e^{-5x} \cos\, 5y + \ldots$ debiendo los coeficientes satisfacer la condición a), de manera que

$$t = a_1 \cos\, y + a_3 \cos\, 3y + a_5 \cos\, 5y + \cdots = 1$$

Que es una serie de Fourier.

Aunque Fourier ha dado también la fórmula para calcular los coeficientes mediante integrales definidas, en este ejemplo procede de manera más inductiva.

En la serie anterior y en las que logra mediante derivaciones sucesivas, hace $y = 0$ y obtiene un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los coeficientes. Tomando un número finito de ecuaciones da con la ley de formación de los coeficientes, pasando al límite y aplicando el teorema de Wilson, llega finalmente a encontrar sus valores

$$a_1 = \frac{4}{\pi}\ ;\ a_3 = \frac{-4}{3\pi}\ ;\ a_5 = \frac{4}{5\pi}\ ; \ldots$$

Y de ahí la integral buscada:

$$t = \frac{4}{\pi}\left(e^{-x} \cos\, y - \frac{e^{-3x}}{3} \cos\, 3y + \frac{e^{-5x}}{5} \cos\, 5y - \cdots\right)$$

Más tarde, con la teoría de las funciones analíticas, se encontró como solución de la ecuación de Fourier

$t = \frac{2}{\pi}(arctg\ e^{-z} + arctg\ e^{-z})$ con $z = x + iy$ y. por lo tanto

$$t = \frac{2}{\pi}\ arctg\ \frac{\cos y}{Sh\ x}$$

EL SIGLO XIX

La matemática y el siglo XIX

En líneas muy generales, tres rasgos caracterizan la matemática del siglo XIX. En primer lugar, al compás del gran desarrollo científico y tecnológico del siglo, preludio de la explosión del siglo actual, la matemática, como las demás ciencias, muestra una fecundidad asombrosa que se revela en el gran incremento del número de científicos y de trabajos, en la creación de sociedades y revistas especializadas, en la celebración de reuniones nacionales e internacionales. La segunda mitad del siglo asiste a la iniciación de las reuniones internacionales en casi todos los campos del saber científico: los matemáticos no fueron de los primeros en reunirse; con todo el primer congreso internacional de los matemáticos pertenece al siglo: Zurich, 1897.

El siguiente dato puede dar idea de la fecundidad científica, en materia de matemática, del siglo XIX: la historia de la matemática más detallada y extensa es aún la de M. Cantor, cuyos cuatro gruesos volúmenes abarcan la historia de esta ciencia desde sus comienzos hasta todo el siglo XVIII; sobre la base de ese tratado se ha calculado que el desarrollo de la matemática del siglo XIX, con igual detalle y extensión, insumiría catorce volúmenes del grosor de los de Cantor, lo que equivale a decir que los progresos realizados durante el siglo XIX triplican con exceso los progresos realizados durante, digamos, los 40 siglos anteriores.

Estos progresos explican e implican el notable cambio que desde el primer tercio del siglo experimenta la matemática en su estructura íntima al conferirle, como segundo rasgo característico, una unidad y una autonomía que en cierto sentido había perdido desde los tiempos helénicos. En efecto, a comienzos del siglo XIX la matemática se presenta como un vasto conjunto de conocimientos distribuido en varias ramas aparentemente distintas: aritmética y teoría de números; geometría elemental, geometría analítica y geometría descriptiva, álgebra y cálculo infinitesimal, circunstancia

que justifica que se siga empleando el término, hoy anticuado, de "matemáticas". Esas diferentes ramas mostraban a su vez distintas modalidades. La aritmética ofrecía un conjunto de reglas supuestas intangibles: en el habla popular la expresión: "el orden de los factores no altera el producto" y otras semejantes, eran los paradigmas de las verdades absolutas. Por su parte la teoría de números que desde el siglo XVII había encontrado excelentes cultores, no consistía sino en problemas particulares, cuya generalización conducía con frecuencia a complicaciones; piénsese en el "teorema de Fermat". En cuanto al álgebra, fuera de algunas cuestiones de índole algorítmica, a comienzos del siglo XIX su problema central, la solución de las ecuaciones algebraicas, se encontraba frente al escollo aparentemente infranqueable de las ecuaciones de quinto grado o superior.

Modalidades distintas presentaban las propiedades geométricas. Aunque algo contaminadas por los procesos y recursos algebraicos, seguían impregnadas de la atmósfera de la geometría griega. Pero esa atmósfera ya no tenía vigencia en el siglo XIX, de ahí que esas propiedades adquirieran un aire de seres anfibios; por un lado se estudiaban a la manera griega "con la inteligencia pura", como entes abstractos habitantes de un mundo platónico de ideas, pero por el otro, a los ojos de los hombres habituados al método experimental, esas figuras geométricas y esas propiedades eran como seres naturales, vinculados con el mundo exterior, no meras imágenes de entes ideales, sino seres reales, visibles y palpables, encadenados a los fenómenos naturales.

Puede llamar la atención esta permanencia, en el campo de la geometría, de la atmósfera griega y el estancamiento durante siglos, de las notas que esa atmósfera implicaba, sobre todo si se compara este hecho con los avances experimentados por las otras ramas de la matemática. Más hay que tener en cuenta, por una parte, que la obra de los geómetras griegos se presentaba con una perfección difícil de superar y, por la otra, que a partir del Renacimiento los gustos y las tendencias de los matemáticos se orientaron casi exclusivamente hacia los métodos analíticos que, mediante las coordenadas o los recursos infinitesimales, ofrecían reglas más cómodas, casi mecánicas, que permitían resolver no sólo los problemas de la geometría tradicional sino otros que

trascendían las posibilidades de los griegos. Si se agrega que el Euclides seguía siendo el texto fundamental en la enseñanza de la matemática elemental, cabe concluir que a comienzos del siglo XIX las propiedades de las figuras geométricas, que enseñaba la geometría griega, y la vinculación de esas figuras con el mundo exterior se habían convertido en un hábito mental.

En cambio seguían rozagantes, a comienzos del siglo XIX los métodos infinitesimales sistematizados por Euler y aplicados con éxito por Lagrange y Laplace en el siglo XVIII.

Sin embargo, desde el punto de vista estrictamente matemático, esos métodos continuaban "en el aire", sin fundamentos sólidos, no obstante los esfuerzos que se habían hecho para sustituir por conceptos más precisos aquellos vagos infinitamente pequeños que eran cero y no eran cero, aquellos incrementos evanescentes que actuaban ya como cantidades finitas, ya como valores nulos.

Nuevamente podría llamar la atención que en la ciencia deductiva por antonomasia se aceptara durante casi dos siglos que una rama tan importante como el cálculo infinitesimal descansara sobre bases tan débiles y discutibles. La explicación de esta aparente paradoja ha de verse en la atmósfera científica que predominaba al organizarse los métodos infinitesimales en el siglo XVII. Tales métodos no habían surgido entonces en virtud de exigencias internas, como había ocurrido en la antigüedad cuando Arquímedes aplica esos métodos en forma rigurosa al proseguir el estudio de las cuadraturas y cubaturas de las figuras geométricas, sino que habían nacido apremiados por circunstancias externas: el dinamismo general de la época y, en particular, la conciencia de la utilidad y el poder que confería el conocimiento de las leyes naturales y la comprobación de que los métodos infinitesimales, por endebles que fueran sus fundamentos, facilitaban aquel conocimiento logrando resonantes triunfos, de ahí que ante el éxito de sus aplicaciones se descuidara el análisis de aquellos fundamentos y se cerrara un ojo ante su endeblez.

Ese éxito no sólo dejaba en la penumbra el valor del cálculo infinitesimal por sí mismo, sino que traía a primer plano un lazo más que ataba la matemática con el mundo exterior. El siglo de las luces con su "naturalismo" consolidará esos lazos, que la filosofía

kantiana remachará al relacionar las verdades matemáticas con los conceptos metafísicos de tiempo y de espacio.

De ahí la configuración de este rasgo de la matemática de comienzos del siglo XIX: su sometimiento a las formas del mundo exterior y su carácter de "doncella de la ciencia natural".

Un tercer rasgo que puede señalarse en la matemática del siglo XIX es el cambio que experimentará en sus fundamentos durante la centuria. Acentuada su autonomía, hacia el último cuarto del siglo comienzan a prevalecer conceptos, en parte nacidos durante su transcurso, que prefiguran una nueva matemática que ha de estructurarse en este siglo, pudiendo señalarse la década del 80 como fecha fronteriza, según expresión de Rey Pastor, entre una matemática clásica y una matemática moderna o, más simplemente, entre dos maneras de fundamentar la matemática, típicas del siglo XIX y del siglo XX.

Las geometrías no euclidianas

El advenimiento de las llamadas geometrías no euclidianas, ocurrido en la primera mitad del siglo, representa el grito inicial de independencia de la matemática y de la proclamación de su autonomía frente al mundo exterior. Con estas nuevas geometrías se vincula la figura de uno de los grandes científicos de la primera mitad del siglo: el alemán Gauss, astrónomo, físico, geodesta, pero sobre todo matemático, con quien se inicia también la pléyade de matemáticos alemanes que ha de llenar todo el siglo.

De los matemáticos alemanes anteriores a Gauss, cabe citar a Johann Friedrich Pfaff, que se ocupó de ecuaciones con derivadas parciales y de determinantes, y la llamada escuela combinatoria cuyo adalid fue Carl Friedrich Hindenburg, que hacía de los polinomios finitos e infinitos la piedra angular del análisis matemático, tomándolos empero formalmente, sin preocuparse en absoluto de su convergencia o divergencia.

De manera distinta actuará Gauss que introduce, o reintroduce, en la matemática lo que desde entonces se ha dado en llamar el rigor, vale decir, la estricta obediencia a las reglas de la deducción.

La labor matemática de Gauss se extendió a casi todas las ramas, en especial se dedicó a la teoría de números y a la geometría diferencial.

Muchos de los descubrimientos de Gauss fueron realizados por él mucho antes de su publicación, y quedaron registrados y fechados en una "libreta de apuntes" que llevó desde 1796 hasta 1814, y que se encontró entre sus papeles póstumos. El primer descubrimiento que anota es la construcción del eptadecágono con regla y compás.

Ya en su tesis de doctorado de 1799 Gauss aporta una contribución básica a la matemática, con una primera demostración del "teorema fundamental del álgebra"; todo polinomio algebraico de una variable se anula por lo menos una vez para un valor real o imaginario de la variable. En esa memoria, afirma sin demostración que no es posible resolver algebraicamente la ecuación de quinto grado.

Dos años después Gauss publica sus *Disquisitiones Arithmeticae* que hace época en la teoría de números, rama a la que Gauss se dedicó desde muy joven. En las *Disquisitiones*, Gauss estructura sistemáticamente el estudio de las "congruencias" y de la teoría de los restos cuadráticos; estudia asimismo la resolución algebraica de las ecuaciones, binomias y llega al notable resultado anexo de la posibilidad de construir con regla y compás los polígonos regulares cuyo número de lados es primo y de la forma $2^{2^n} + 1$.

Entre otras cuestiones aritméticas tratadas por Gauss figuran las hoy llamadas "sumas de Gauss" y la extensión de la teoría de los restos a los bicuadráticos, en conexión con la cual introduce los "números complejos enteros". Se inicia así la introducción sistemática de los números complejos en matemática y su representación gráfica, hoy en uso, que Gauss publica en 1831, aunque parece que estaba en posesión de ella desde 1799. Esa representación fue encontrada independientemente por el danés Carl Wessel, quien la publicó en 1797, y por el suizo Jean Robert Argand que la hizo conocer en 1806.

Gauss fue un calculista extremadamente hábil y rápido; realizaba divisiones para descubrir periodos de centenar de cifras y se le debe la primera tabla, en 1812, de "logaritmos de adición", cuya idea inicial fue sugerida en 1803 por el, físico italiano Giuseppe Zecchini Leonelli.

En 1827 aparecen las *Disquisitiones generales circa superficie curvas*, en las que se funda el estudio de la geometría diferencial de las superficies, encaradas éstas “no como el límite de un sólido, sino como un sólido flexible e inextensible, una de cuyas dimensiones está obligada a desvanecer”. En sus estas *Disquisitiones*, Gauss introduce los conceptos de representación esférica, de coordenadas curvilíneas sobre una superficie, de elemento lineal de aquélla mediante una forma cuadrática de sus diferenciales, de líneas geodésicas, de curvatura total, etcétera,

Con Gauss se inicia el estudio estrictamente riguroso de las series, en conexión con la serie "hipergeométrica", que lleva su nombre, y proporciona, como casos particulares, el desarrollo en serie de numerosas funciones. En el estudio de esta serie, aparecido en 1811, Gauss introduce sistemáticamente el concepto de convergencia y generaliza al campo complejo la función $\pi(z) = z!$, ya extendida al campo real por Euler. El concepto de límite infinito potencial, como único admisible en matemática, lo formula claramente Gauss al decir: "Me opongo, al uso de las magnitudes infinitas como de algo completo que en matemática jamás se permite. El infinito no es sino una *façon de parler*,...”.

Entre otras contribuciones analísticas de Gauss, pueden mencionarse el descubrimiento, independientemente de Abel y Jacobi, de la doble periodicidad de las funciones elípticas, el método de los cuadrados mínimos y la ley de distribución de los errores de observación, un método de integración aproximada que logra la máxima aproximación con el mismo número de coeficientes, etcétera.

Por último, Gauss fue uno de los descubridores, de las geometrías no euclidianas, nombre que le pertenece.

En realidad, los primeros intentos en este sentido provenían del siglo anterior. Gerolamo Saccheri en 1733, año de su muerte, hace conocer un *Euclides... vindicatus*, cuyo objeto era demostrar la verdad del Quinto postulado de los *Elementos*, y sus

consideraciones lo hubieran llevado al descubrimiento de las nuevas geometrías si aquel objeto preconcebido no se lo hubiera impedido. En esas consideraciones Saccheri parte de un cuadrilátero "birrectángulo isósceles", es decir un cuadrilátero $ABCD$ tal que AB y DC son iguales y perpendiculares a BC. Demuestra, sin recurrir al postulado de las paralelas, que los ángulos en A y en D son iguales, y encara la triple posibilidad de ser esos ángulos, ambos rectos, obtusos o agudos. Pero como Saccheri se propone "reivindicar" a Euclides, se esfuerza en demostrar, y según él lo logra, que las hipótesis de los ángulos obtuso y agudo conducen a absurdos con lo que, resultando que el cuadrilátero $ABCD$ ha de ser un rectángulo, queda demostrado el quintó postulado. Mientras que la demostración de ser absurda la hipótesis del ángulo obtuso la logra Saccheri con relativa facilidad, la cuestión se complica al tratar la hipótesis del ángulo agudo, aunque en sus últimas proposiciones llega a la conclusión de que esa hipótesis "es absolutamente falsa porque repugna a la naturaleza de la línea recta" pues en tal caso "una oblicua... y una perpendicular a AB tendrían una perpendicular común en un punto común en el infinito…". Sólo el preconcepto de demostrar que el postulado de Euclides era verdadero pudo hacerle aceptar teorema tan poco geométrico. "He comenzado a escribir algunos resultados de mis meditaciones sobre este asunto que se remontan en parte a cuarenta años...", aunque el año siguiente, enterado del trabajo de Bolyai, abandona ese propósito. Los apuntes encontrados entre sus papeles comprueban que proyectaba escribir una Geometría no euclidiana, convencido de que la prescindencia del postulado de las paralelas no conducía a ninguna contradicción, "aunque a primera vista muchos de sus resultados ofrecían un aspecto paradójico". Entre esos resultados figura la existencia en esa geometría de una unidad absoluta para los segmentos, razón por la cual tanto Lambert como Legendre habían rechazado tal geometría. Con esa unidad estaba vinculada una constante indeterminada que al crecer infinitamente convertía al sistema geométrico en el sistema euclideo.

Semejantes conclusiones, pero independientes de las de Gauss, fueron algunas noticias que en 1818 el jurista Ferdinad Karl Schweikart remitió a Gauss, así como las de un sobrino de éste,

Franz Adolf Taurinus, que en 1824 se había ocupado de la cuestión, inspirado en las observaciones de Schweikart y de Gauss, y había desarrollado las fórmulas que correspondían a la geometría fundada en la hipótesis del ángulo agudo de Lambert, que obtenía con sólo sustituir, en las fórmulas de la trigonometría esférica, el valor del radio por un número imaginario puro. En esa geometría, que Taurinus llamó "geometría logaritmo-esférica" (al pasar del radio real al imaginario las funciones circulares se transforman en hiperbólicas que, a su vez, son combinaciones de exponenciales, inversas de la logarítmica), aparecía la constante de Gauss que, al variar de valores reales a imaginarios pasando por el infinito, permitía pasar de la geometría esférica a la nueva geometría pasando por la euclidiana. Pero Taurinus, aun reconociendo la compatibilidad lógica de las proposiciones de esta geometría logaritmo-esférica, no admitía su validez en el plano pues, impregnado de la verdad absoluta de la geometría de Euclides y de las ideas entonces dominantes de la filosofía de Kant, que hacía del espacio euclidiano una intuición pura *a príori*, veía precisamente en la indeterminación de esa constante un argumento en contra de una geometría que reputaba única y absoluta.

En cambio llegaron, como Gauss pero independientemente de él, a la conclusión de que podía erigirse un sistema geométrico, prescindente del postulado de las paralelas, dos matemáticos de países que hasta entonces no hablan contribuido al progreso de la matemática: Janos Bolyai, húngaro, y Nicolaus Ivanovich Lobachevski, ruso.

J. Bolyai fue hijo de Wolfgang Bolyai, también matemático y condiscípulo de Gauss, y es precisamente como apéndice del primer volumen de una obra didáctica del padre que aparece en 1832 la *Ciencia absoluta del espacio* de J. Bolyai, quien en apenas 16 páginas expone "un universo creado de la nada", como él mismo se expresa. Bolyai da el nombre de "geometría absoluta" a sus consideraciones porque se refieren a propiedades geométricas independientes del postulado de las paralelas que son entonces teoremas o verdades absolutas, válidas tanto para la geometría ordinaria como para la geometría más general que él ha construido. Así, por ejemplo, las fórmulas de la trigonometría esférica son

fórmulas absolutas, pues pueden deducirse independientemente del postulado de las paralelas.

La exposición de Lobachevski es muy semejante, aunque más constructiva. Su primer trabajo es de 1829, pero se ha perdido, mientras que en 1836 aparecen en ruso sus *Nuevos elementos de geometría con una teoría completa sobre las paralelas*, obra que pasa inadvertida y de la cual da en 1840 un resumen en alemán, mientras que en 1855, año anterior a su muerte y casi ciego, dicta la exposiciones, completa de su teoría en ruso y en francés: *Pangéométrie des Précis de Géamétrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles*. En esa *Pangéométrie* Lobachevski parte del punto, de la circunferencia y de la esfera como entes fundamentales, de los cuales deduce la recta y el plano; define luego como "paralela a una recta dada por un punto dado a la recta límite que entre las situadas en el mismo plano que pasan por el punto y del mismo lado de la perpendicular bajada del punto a la recta, separa las rectas que cortan a la dada de las que no la cortan". Luego, en forma puramente analítica (en la Pangéométrie no hay figuras) desarrolla toda la trigonometría de esta geometría imaginaria.

La identidad de los resultados logrados por Schweikart, Taurinus, Gauss, Lobachevsky y Bolyai puede comprobarse si se considera que en todos ellos el núcleo central de los desarrollos analíticos es la expresión $Ch\,\frac{a}{k}\cdot sen\,\pi(a) = 1$, donde a es un segmento cualquiera y $\pi(a)$ es el llamado "ángulo de paralelismo" correspondiente al segmento a, es decir, si AB = a y Bc una perpendicular, el ángulo $\pi(a)$ es el ángulo que forma la paralela a BC por A y k es la constante de Gauss, que en sus desarrollos Lobachevski toma igual a la unidad. Para $\pi(a)$ = 45°, a es la constante de Schweikart, que Taurinus calculó; para $k \to \infty$ y $\pi(a) = 90°$ estamos en el caso de la geometría euclidiana de paralela única y de ángulo de paralelismo independiente de a. Si k pasa de real a imaginario, las fórmulas de la geometría no euclidiana que vinculan los ángulos de paralelismo con los lados, se convierten en las fórmulas de la trigonometría esférica.

Es importante agregar que en todos estos intentos de nuevas geometrías seguía aún subyacente la concepción de la geometría

como, rama de la ciencia natural, como ciencia del espacio físico, concepción que si bien no acepta la tesis kantiana del espacio como forma de nuestra subjetividad cuyo molde es la geometría euclidiana, continúa concediéndole un significado real y haciendo de la geometría una ciencia deductiva racional fundada sobre postulados empíricos, de manera que sólo la experiencia decidiría cuál es la geometría válida.

Gauss mismo, en quien la idea de una matemática abstracta ante entes matemáticos fruto de la libre creación de la mente no podía dejar de serle simpática, no pudo sustraerse al prestigio geométrico del mundo exterior y trató de comprobar, mediante experiencias geodésicas, la posibilidad de detectar triángulos cuyos ángulos no sumaran dos rectos.

Hacia mediados de siglo se cierra la primera etapa en el advenimiento de las geometrías no euclidianas, que había visto el nacimiento, de un primer grupo de ellas: las llamadas, por Klein, geometrías hiperbólicas, que corresponden a la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri y Lambert y a la existencia de dos paralelas desde un punto a una recta situada a la distancia a, que forman a ambos lados de la perpendicular, bajada desde ese punto, el ángulo de paralelismo $\pi(a)$. (1)

En la segunda etapa en el desarrollo de las geometrías no euclidianas, se completa el cuadro de esas geometrías y se las estudia según las nuevas direcciones, métrico-diferencial y métrico-proyectiva.

Esa etapa se desarrolla en la segunda mitad del siglo.

La dirección métrico-diferencial se inicia con Georg Friedrich Bernhard Riemann, discípulo y continuador de Gauss, cuyas ideas fundamentales, que permitieron encarar el problema de las nuevas geometrías desde un punto de vista muy superior, figuran en la disertación, hoy célebre, pronunciada en 1854 (aunque publicada en 1867). Sobre las hipótesis en que se funda la geometría, donde se analiza, en la forma más general posible, el comportamiento infinitesimal de una multiplicidad de un número cualquiera de dimensiones. En esa disertación aparece la importante distinción entre, "infinito" e "ilimitado", que debía desempeñar en el presente siglo singular papel en la teoría (física de la relatividad, teoría por lo demás en que es visible la influencia de las ideas de Riemann.

Dice éste en su disertación: "Cuando se extienden las construcciones del espacio a lo infinitamente grande ha de distinguirse lo ilimitado de lo infinito. Lo primero pertenece a las relaciones de la extensión, lo segundo a las relaciones métricas. Que el espacio es una variedad ilimitada de tres dimensiones es una hipótesis que se aplica en todas las concepciones relativas del mundo exterior, que nos sirve para completar en todo momento el campo de nuestras percepciones y que constantemente se encuentra verificada en todas sus aplicaciones. De ahí que la propiedad del espacio de ser ilimitado posea una certeza empírica que ningún otro dato empírico posee. Pero de ella no sigue de ningún modo la infinitud del espacio, al contrario si se suponen los cuerpos independientes de sus posiciones y se atribuye al espacio una curvatura constante, el espacio sería necesariamente finito, en cuanto la medida de la curvatura fuera positiva, por pequeña que fuera.

Una consecuencia de las consideraciones de Riemann fue la ampliación del cuadro de las geometrías no euclidianas y la introducción de la geometría elíptica (y esférica), que corresponde a la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri y Lambert, en la que desde un punto exterior a la recta no existen paralelas a ella. Queda así, para completar el cuadro, la geometría parabólica, nuestra geometría euclidiana, en la que la paralela desde un punto exterior a una recta es única.

Con el estudio de las geometrías generales reimannianas en la dirección métrico-diferencial, que hoy se llaman "espacios de Riemann", tienen importancia las superficies de curvatura constante, cuyos ejemplos más simples son el plano (curvatura nula) y la esfera (curvatura positiva). Una superficie de curvatura constante negativa fue dada en 1868 por Eugenio Beltrarni: es la superficie engendrada por rotación de la tractriz, curva plana cuya propiedad característica es la de ser constante la longitud de la tangente. Así como nuestra geometría plana es un tipo de geometría parabólica y la geometría sobre la esfera (con alguna variante) es un tipo de geometría elíptica, la geometría sobre esa superficie de Beltrarni (de la cual éste construyó también un modelo, la seudoesfera) es un tipo de geometría hiperbólica.

La existencia de esta superficie, así como otras interpretaciones de geometrías no euclidianas sobre el plano euclideo que se dieron posteriormente, puso fin a toda discusión acerca de la validez lógica de las nuevas geometrías, pues la supuesta contradicción que se había querido ver en ellas llevaría consigo igual contradicción en el seno de la geometría euclidiana, jamás puesta en duda hasta entonces.

Para terminar con las geometrías no euclidianas recordemos que la dirección métrico-proyectiva aparece en 1859 cuando Cayley logra la subordinación de las propiedades métricas (distancia entre dos puntos, ángulo entre dos rectas, etcétera) a las propiedades gráficas, mediante la demostración de que tales propiedades métricas se traducen en propiedades proyectivas de sus elementos, si se relacionan éstos con los elementos de una cónica (o de una cuádrica si se trata del espacio), que denominó la cónica, o la cuadrica, absoluta o simplemente lo absoluto del plano o del espacio. Una consecuencia notable de esta demostración es que, según se elija este absoluto (real o imaginario, propio o impropio), se obtienen distintas geometrías y se vuelven a encontrar por este camino las geometrías no euclidianas, que pueden estudiarse siguiendo esta dirección métrico- proyectiva. De ahí también la frase de Cayley: "La geometría proyectiva es toda la geometría".

Nota complementaria

(1) La difusión de las nuevas geometrías. Las nuevas ideas tuvieron una difusión muy lenta, en parte por ser nuevas y no concordar con las concepciones filosóficas vigentes y en parte por la escasa difusión (y la difícil lectura, en el caso de Lobachevski) de las obras de ambos fundadores, matemáticos hasta entonces desconocidos. Felizmente un grupo selecto de matemáticos de distintos países se esforzaron en hacer conocer esas nuevas ideas, que fueron aceptadas hacia 1870, cuando ya se habían iniciado las

investigaciones de las geometrías no euclidianas en las direcciones métrico-diferencial y métrico-proyectiva.

Entre esos matemáticos, propulsores de la geometría no euclidiana en su primera etapa, cabe citar: en Alemania, Heinrich Richard Baltzer, que se ocupó también de curvatura de las superficies; en Francia, Guillaume Jules Hoüel, que tradujo el *Apéndice* de Bolyai, se ocupó de sus manuscritos y escribió sobre temas vinculados con las nuevas geometrías; en Italia, Giuseppe Battaglini, que en 1861 convierte el "*Giornale di Matematiche*", que dirigía y había fundado en 1863, en una especie de órgano oficial de las nuevas geometrías; en Inglaterra, William Kingdow Clifford, uno de los iniciadores de la geometría algebraica, y en España, Zoel García de Galdeano, que contribuyó a divulgar éste y otros temas en "*El Progreso matemático*", primera revista matemática española, que fundó en 1891.

La aritmetización del análisis

Como vimos, el cálculo infinitesimal en sus tres ramas: cálculo diferencial, cálculo integral y cálculo de variaciones, había adquirido en el siglo XVIII, en manos de Euler y Lagrange, un desarrollo extraordinario. Pero ese desarrollo, puramente formal y algorítmico, no estaba fundado sobre sistema conceptual riguroso alguno. Cuando se aludía a los fundamentos se hablaba de la metafísica del cálculo infinitesimal; cuando se hablaba de series, el uso de las series divergentes estaba rodeado de misterios y oscuridades.

Tal estado de cosas cambia en el siglo XIX cuando el estudio de los métodos infinitesimales, que ahora se convierten cabalmente en un análisis infinitesimal, sin dejar de progresar en su desarrollo y hasta en forma más rica y variada, ahonda en sus propios principios y encuentra una base firme en la aritmética, eliminando de su seno toda vaga e inútil "metafísica". Tal es el proceso que se denominó "aritmetización del análisis", cuyo precursor fue Bernard Bolzano y sus constructores Cauchy, Abel, Jacobi,...

En numerosas cuestiones se adelantó Bolzano a los analistas rigurosos del siglo XIX: en el concepto de función continua, en el criterio de convergencia de series, en la existencia de funciones continuas sin derivada, pero por haber publicado sus escritos de análisis en Praga, ciudad entonces alejada de los centros científicos, o por permanecer inéditos, como su *Teoría de funciones*, que se publicó en 1930, la influencia de sus ideas fue escasa.

Por su parte, Augustin-Louis Cauchy, en su *Analyse algébrique* de 1822, escribe: "He tratado de dar a los métodos todo el rigor que se exige en geometría, sin acudir jamás a los argumentos tomados de la generalidad del álgebra. Tales argumentos, aunque bastante admitidos comúnmente, sobre todo en el pasaje de las series convergentes a las divergentes y en el de las cantidades reales a las imaginarias, se me ocurre que no deben ser considerados sino como inducciones, adecuadas a veces para hacer presentir la exactitud y la verdad pero que no están de acuerdo con la exactitud tan reputada de las ciencias matemáticas. Además debe observarse que ellas tienden a atribuir a las fórmulas algebraicas una extensión ilimitada, mientras que en la realidad la mayor parte de esas fórmulas subsisten únicamente bajo ciertas condiciones y para determinados valores de las cantidades que ellas encierran. Determinando esas condiciones y esos valores, fijando de manera precisa el sentido, de las notaciones que utilizo, toda vaguedad desaparece".

Es decir, vuelta al clásico rigor geométrico, precisión en las definiciones, delimitación del campo de validez de las fórmulas, eliminación de toda extensión ilegitima, he ahí el programa trazado por Cauchy y cumplido en sus numerosos libros y memorias.

Con estas condiciones rigurosas y mediantes adecuadas definiciones de función, de continuidad, de límite, Cauchy funda el análisis sobre bases más firmes que sus antecesores. Retoma el concepto de integral como suma y no solamente como operación inversa de la diferencial y aunque no va mucho más lejos en el concepto de integral y de función, es más riguroso que Euler. En las series fija claramente su convergencia y elimina, algo a pesar suyo, las series divergentes del análisis. "Me he visto obligado -dice- a admitir diversas proposiciones que parecerán algo duras; por ejemplo, que una serie divergente carece de suma." Hay en este

escrúpulo un atisbo del devenir de la "teoría de las series divergentes" que se organiza en el siglo XX retomando, ahora con rigor, la idea euleriana.

La contribución más importante de Cauchy es sin duda la que se refiere a la teoría de las funciones analíticas, que elabora utilizando los resultados de Euler, Clairaut, D'Alembert, Poisson, Lagrange... En sus estudios extiende la serie de Taylor a las funciones de variable compleja, apareciendo así la llamada "integral de Cauchy", que permite obtener el valor de una función en cada punto interior de un recinto, conociendo el valor de la función en su contorno. En conexión con estos resultados Cauchy desarrolló su teoría de los polos, de los residuos, de la serie de Taylor, cuya generalización, hoy conocida como "serie de Laurent", realizó un discípulo de Cauchy, Pierre-Alphonse Laurent.

Se deben además a Cauchy estudios e investigaciones acerca de los determinantes, de teoría de números y teoría de grupos de sustituciones, acerca de investigaciones de índole algebraica sobre eliminación y separación de raíces complejas, así como de temas de física matemática (teoría de la elasticidad).

Con la expulsión de las series divergentes del análisis, Cauchy completó la obra iniciada por Niels Henrik Abel, para quien "las series divergentes son en general una invención diabólica y es vergonzoso que se pretenda fundar sobre ellas demostración alguna; la parte más esencial de la matemática carece de base. Es cierto que la mayor parte de los resultados son exactos pero esto es algo verdaderamente extraño… En el análisis superior sólo pocas proposiciones están demostradas de manera indiscutiblemente rigurosa. Constantemente se encuentra la deplorable costumbre de deducir lo general de lo particular y es sin duda muy notable que con tal manera de proceder no se llegue con más frecuencia a lo que se denominan paradojas".

En el campo del análisis Abel se ocupó de series y de teoría de funciones, Con Jacobi forma la pareja de creadores de las funciones elípticas, obtenidas como funciones inversas de las integrales elípticas. Esta idea clave de la inversión de las dos variables había escapado a Legendre en su estudio de las integrales elípticas, a las que consagró muchos años. Realizada la inversión y consideradas las funciones elípticas como funciones de variable compleja,

apareció su doble periodicidad. Abel además, generalizó las funciones elípticas, incluyéndolas en una “clase très-étendue de fonctions trascendantes”, hoy denominadas *funciones abelianas*, cuyas propiedades estudia en una memoria que presentó a la Academia de Ciencias de París en 1826, pero que no se publicó sino después de la muerte de su autor.

Por último, con su solución del problema de la tautócrona Abel inaugura una nueva rama del análisis infinitesimal: las ecuaciones integrales.

Sistematizador del estudio de las funciones elípticas mediante el algoritmo de las series es Carl Gustav Jacob Jacobi, que expuso en su *Fundamento Nova Theoria Functíonum Ellipticarum* de 1829. Con la labor de Abel y Jacobi acerca de las funciones elípticas, se vincula un significativo incidente que muestra la evolución que estaba experimentando el concepto de la matemática frente a la ciencia natural.

En el mismo año de su muerte (1829) Abel, en un trabajo publicado en el Journal de Crelle, había hecho mención de la memoria enviada a la Academia de París. A este respecto Jacobi interrogó a Legendre, quien manifestó que la memoria de Abel era ilegible y que se había solicitado inútilmente al autor un manuscrito mejor.

Sin embargo se sospechó que lo ocurrido se debía a que los matemáticos franceses, muy ocupados en cuestiones de física matemática -calor, elasticidad, electricidad- descuidaban las cuestiones de matemática pura. Lo cierto es que, al comentar la obra de Jacobi sobre las funciones elípticas, Poisson recordó un reproche de Fourier a Abel y jacobi por no ocuparse de cuestiones de física matemática. La contestación de jacobi (en carta dirigida a Legendre) expresa: "Poisson no debía haber reproducido una desgraciada frase de Fourier que nos reprocha, a Abel y mi, por no ocuparnos del movimiento del calor. Es cierto que Fourier estima que la finalidad principal de la matemática es la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales, pero un filósofo como él debería saber que la única finalidad de la ciencia es el honor del espíritu humano y que, en consecuencia, una cuestión de la teoría de los números tiene un valor tan grande como una cuestión de los sistemas de los mundos".

Dejemos de lado el tono de esta frase, que por lo demás concuerda perfectamente con la época en que fue lanzada: 1830 es la fecha oficial del nacimiento del movimiento romántico. Para nuestro objeto es más interesante señalar cómo esta valoración y esta proclamación de independencia del análisis y de la matemática con respecto a la ciencia natural son contemporáneas con el advenimiento de las geometrías no euclidianas, que proclamaban igual independencia de la geometría y de la matemática frente al yugo del mundo exterior; de ahí que pueda fecharse hacia 1830 el grito inicial de la autonomía de la matemática.

Jacobi, que además fue un maestro inspirado, se ocupó de casi todas las ramas de la matemática. En teoría de números continuó las investigaciones de Gauss especialmente en restos cúbicos; se le deben estudios sobre determinantes funcionales, a uno de los cuales Sylvester denominó jacobiano; se ocupó de cálculo de las variaciones y de integración de ecuaciones diferenciales. Uno de sus métodos, llamado del último multiplicador, fue aplicado por él en la integración de las ecuaciones de la dinámica.

Se ocupó también de análisis el sucesor de Gauss en la cátedra de Göttingen: Peter Gustav Lejeune Dirichlet, quien expuso, con Riemann, la formulación más general de función como correspondencia entre dos conjuntos de números, cualquiera sea el modo de establecer esa correspondencia. Se le debe también la formulación precisa de las condiciones para que una función pueda desarrollarse en serie de Fourier; introdujo el concepto de series absolutamente convergentes (cuando converge la serie de los valores absolutos de sus términos), etcétera. En teoría de funciones existe un llamado "problema de Dirichlet' que consiste en determinar en un recinto una función finita y continua de dos variables reales que satisfaga la ecuación de Laplace, conocidos los valores que toma la función en el contorno. La existencia de esta función, problema importante en física, está vinculada con el llamado (por Riemann) “principio de Dirichlet”, que éste estableció a modo de postulado en sus estudios sobre la teoría del potencial.

Además de su contribución a los fundamentos de la geometría, se deben a Riemann notables aportes, distintas ramas del análisis matemático. Así se le debe un concepto de integral definida más general que el de Cauchy, pues incluye el caso en que la función

admita infinitas discontinuidades, siempre que se mantenga acotada. Inversamente, en su estudio acerca de las series trigonométricas, alude a la existencia de funciones continuas sin derivadas.

También se deben a Riemann los fundamentos del *Analysis situs* o Topología y el estudio de las funciones de variable compleja mediante la ecuación de Laplace, que concede jerarquía matemática a este recurso, importante para la física. Con las funciones de variable compleja se vincula la llamada "superficie de Riemann", que éste ideó para hacer uniformes las correspondencias multiformes entre las variables complejas.

Riemann se ocupó con éxito de las funciones elípticas, de las series trigonométricas y de la integración de ecuaciones diferenciales. Se le debe, por último, la función ζ que lleva su nombre, importante en la teoría de los números primos y de la cual dio seis propiedades sin demostración (de esas propiedades queda aún por demostrar que los ceros de la función tienen por parte real ½).

El continuador de la obra de Abel y de Jacobi sobre las funciones elípticas, es otro de los notables analistas del siglo: Karl Weierstrass, creador de una nueva dirección en el estudio de las funciones analíticas de variable compleja. Mientras que Cauchy y Riemann estudian, como tales, aquellas funciones que tienen derivada única en cada punto, es decir, cuyas componentes real e imaginaria satisfacen la ecuación diferencial de Laplace, Weierstrass llama función analítica a toda función definida mediante una serie de potencias convergente en cierto recinto que, mediante determinadas condiciones, es posible "prolongar" por círculos sucesivos. Cuando el recinto es todo el plano, la función es una "trascendente entera", En conexión con esa teoría Weierstrass utilizó sistemáticamente el concepto de convergencia uniforme que Cauchy no poseyó y fue investigado por primera vez por Stokes en 1847, y dio, entre muchos otros resultados, la expresión de las trascendentes enteras mediante productos infinitos de "factores primarios", como los llamó Weierstrass.

Se debe también a Weierstrass la introducción del rigor aritmético en el cálculo de variaciones y un ejemplo, que impresionó a los matemáticos de su tiempo, de función continua

sin derivada en ninguno de sus puntos (un ejemplo de Bolzano permaneció en general desconocido).

En 1863 Weierstrass expuso la demostración del "teorema final de la aritmética", según la cual no existe ningún sistema de números complejos de más de dos unidades, es decir distintos de los números complejos ordinarios, que satisfaga todas las propiedades formales de las operaciones aritméticas fundamentales. En 1872 retomó el problema de la fundamentación de los números reales, que en verdad no había experimentado modificación esencial desde Eudoxo, quien como vimos dio tal fundamentación pero fundada sobre magnitudes geométricas.

Continuador de Cauchy y destacado matemático francés fue el ya mencionado Liouville, a quien se debe un teorema fundamental para las funciones analíticas; en 1844 creó un método para la construcción de números trascendentes. Expuso con Sturm un capítulo importante de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con dos valores iniciales dados (en vez de las condiciones de Cauchy en un solo punto) e inició en 1837 la teoría de las ecuaciones integrales con su método de aproximaciones sucesivas.

El último, cronológicamente, de los analistas franceses que actuó en el siglo XIX, es Charles Hermite (fallecido el primer año del presente siglo), que se ocupó de funciones elípticas, de álgebra, de teoría de números y, en general, de análisis. Con su nombre se vincula la resolución del problema de la cuadratura del círculo. (1)

En cuanto a la introducción del nuevo análisis en Italia cabe mencionar unos párrafos de una conferencia de Volterra de 1900: "En el otoño de 1858 tres jóvenes matemáticos italianos emprendían juntos un viaje científico con el objeto de visitar las universidades extranjeras y ponerse en contacto con los más célebres científicos de los demás países, a fin de conocer sus ideas y al mismo tiempo hacer conocer los propios trabajos científicos... En gran parte se debe al esfuerzo de estos tres matemáticos, a sus enseñanzas y al celo incansable que ejercieron para impulsar a los jóvenes matemáticos italianos hacia las investigaciones científicas… que en Italia naciera una escuela moderna de cultores del análisis". Esos tres jóvenes eran Brioschi, Betti y Casorati. Francesco Brioschi se ocupó de numerosas cuestiones de análisis y de geometría diferencial. Enrico Betti, el más importante de los

tres, además de ocuparse de cuestiones de álgebra, creó en 1871 la rama combinatoria del *Analysis situs o Topolagia*, según el nombre que acuñó Johann Benedict Listing en 1847 para esa rama matemática; y en esta topología combinatoria es donde aparecen los llamados "números de Betti". Además uno de sus discípulos; Ulisse Dini, publicó en 1878 una obra importante sobre los fundamentos de las funciones de variable real. Por su parte, Felice Casorati se ocupó de funciones analíticas y de geometría diferencial.

La aritmetización del análisis fue un proceso que se realizó de arriba abajo, comenzando con el cálculo infinitesimal, mientras el número irracional, también personaje infinitesimal, seguía llamándose "inconmensurable", dentro de la concepción geométrica de Eudoxo de 23 siglos de edad. Este contrasentido fue salvado en los cursos universitarios de Weierstrass, Méray, Cantor… mediante sucesiones monótonas de números racionales o mediante series convergentes. No deja de ser sintomático que en el mismo año 1872 aparezcan impresas las teorías de los tres profesores mencionados (aunque Charles Méray había iniciado esas publicaciones ya tres años antes). Es también en 1872 cuando aparece otra fundamentación rigurosa del número irracional, pero de índole diversa de las anteriores, por obra de Richard Dedekind, matemático que se ocupó también con éxito de teoría de números, que en ese año de rara coincidencia publica su *Stetigkeit und lrrationale Zaenhlen*, donde expone sus conocidas "cortaduras", que en realidad venia enseñando desde el año 1858.

Hacia estos años de la década de 1870, la aritmetización del análisis se ha completado. Ese proceso no sólo asentó sobre bases aritméticas, claras y firmes, los fundamentos del análisis y aventó con ello las brumas metafísicas que durante todo el siglo XVIII habían oscurecido aquellos fundamentos, sino que mostró también que, en su esencia, todo había consistido en añadir a las operaciones aritméticas una nueva operación, el paso al límite, operación de índole peculiar, ya que estaba oculta en los umbrales de la matemática -sucesión de los números, magnitudes irracionales- pero que mediante una definición adecuada se convirtió en el instrumento que consolidó y otorgó rigor al conjunto de conceptos y métodos infinitesimales, iniciado por

Newton y Leibniz y continuado por los Bernoulli, Euler y Lagrange. Por otra parte, aquella aritmetización aclaro y desbrozó el camino que debía conducir a nuevos desarrollos, al aplicar el paso al límite a las funciones de variable real o compleja. En efecto, tal aplicación sistemática de la nueva operación, ya mediante el infinito numerable, ya mediante el infinito continuo, a las operaciones aritméticas había dado lugar en el análisis clásico a nuevos algoritmos: las series y las integrales son combinaciones del paso al límite con la suma, el producto infinito lo es con la multiplicación, la derivada con la división; de ahí que su aplicación a todo proceso algebraico o funcional podía dar lugar a nuevos algoritmos.

Profundizar la investigación de los algoritmos clásicos y crear estos nuevos algoritmos, será la tarea del análisis durante la segunda mitad del siglo en un proceso que reseñaremos en líneas generales.

La obra de Weierstrass fue continuada por su discípulo Hermann Amandus Schwarz, que se ocupó de cálculo de variaciones, en especial de superficies de área mínima. Se le deben investigaciones en teoría de grupos y en teorías de funciones se conoce una "desigualdad de Schwarz", generalización de la elemental propiedad del cálculo vectorial, que el producto escalar de dos vectores no puede superar el producto de sus módulos.

También siguió las huellas de Weierstrass, Gösta Magnus Mittag-Leffler, promotor de los estudios matemáticos en los países escandinavos mediante la fundación en 1882 del periódico "*Acta Mathematica*", que dirigió hasta su muerte, y del Instituto Matemático de Estocolmo en 1916.

De series, en especial de divergentes y condicionalmente divergentes, se ocupó el holandés Thomas-Jean Stieltjes, que en 1894 dio una extensión de la integral definida en la dirección que más tarde (1902) seguirá Lebesgue.

En el campo de las ecuaciones diferenciales fueron sus propulsores a fines de siglo Immanuel Lazarus Fuchs, que crea la teoría de las ecuaciones lineales fundada en las funciones analíticas, y el noruego Sophus Lie, quien abre una nueva vía en ese campo al introducir, desde 1872, la teoría de grupos continuos de transformaciones, en especial las transformaciones de contacto,

uno de cuyos ejemplos de 1870 es la llamada "transformación de Lie", que transforma rectas del espacio ordinario en esferas.

En el estudio de las ecuaciones con derivadas parciales debe mencionarse a otro analista francés, Jacques Hadamard, quien en su larga vida (murió casi centenario) se ocupó de numerosas cuestiones de matemática: distribución de los números primos, análisis funcional (este nombre le pertenece), etcétera, amén de temas conexos como su conocida *Psicología de la invención en el campo matemático* (existe traducción en español) de 1944.

El cálculo de variaciones, del cual aparece un esbozo histórico en la obra de *Leonida Tonelli Fondamenti di calcolo delle voriazioni* (dos volúmenes) de 1922-1923, fue en verdad absorbido por una nueva rama del análisis que nace a fines de siglo: el análisis funcional, que introduce nuevos algoritmos. Ya desde 1887 el italiano Vito Volterra organiza la "teoría de funciones de línea" que sistematiza en 1913, mientras que en 1896 introduce las llamadas “ecuaciones integrales”, nuevo algoritmo que, con las ecuaciones integro-diferenciales, encuentran una amplia exposición en la obra del sueco Eric Ivar Fredholm en 1903.

A esta altura de los tiempos, a la vuelta del siglo, es notable en el campo del análisis, como en toda la matemática, la influencia de las dos grandes figuras de la época: Henri Poincaré y David Hilbert.

Se deben a Poincaré numerosos libros y un millar y medio de memorias acerca de todas las ramas de la matemática, así como de física matemática, astronomía y epistemología. En el campo del análisis destaquemos sus investigaciones de las funciones llamadas "automorfas" (1881), sus estudios acerca de la uniformación de funciones, de la topología combinatoria, de teorías integrales de ecuaciones diferenciales, de determinantes infinitos,... Acerca de Poincaré ha escrito Gaston Julia en 1954: "Dentro de una actividad incesante y siempre renovadora, ha recorrido todos los dominios de la matemática y de la física de su tiempo, extrae de ellos los principios filosóficos y descubre tantos campos nuevos de investigación que es posible que no exista dominio matemático actual que no haya fecundado o no haya dejado en él su sello".

Lo mismo puede decirse de Hilbert, cuya influencia en la matemática se ejerció durante casi toda la primera mitad de este siglo. Ha impreso su sello y dejado huella en todas las cuestiones

vitales de la matemática, desde el análisis de sus fundamentos y los capítulos más elevados hasta el tratamiento de problemas particulares.

Es famoso el discurso pronunciado por Hilbert en el Congreso de París de 1900, sobre los "problemas de la matemática", en el que enumeró 23 problemas matemáticos que entonces esperaban solución (2). En gran medida la matemática del siglo actual ha surgido del estudio de esos problemas en su mayor parte resueltos pero, lo que es más importante, dejando tras de sí nuevos problemas.

Al referirse a la producción matemática de Hilbert dice Jean Dieudonné: "Lo que asombra a primera vista en los trabajos de Hilbert es la belleza pura de su grandiosa arquitectura. No se trata de una impresión de elegancia superficial que resulta de cálculos hábilmente conducidos, sino de una satisfacción estética mucho más profunda, que se desprende de la perfecta armonía entre el fin perseguido y los medios puestos en juego para alcanzarlos. Estos últimos son a menudo de desconcertante simplicidad. Por lo general no fue un perfeccionamiento más o menos ingenioso de los métodos de sus antecesores lo que permitió a Hilbert hacer sus grandes descubrimientos sino, por el contrario, un retorno voluntario al origen del problema tratado; de este modo separaba de la ganga, donde nadie había sabido verlos, los principios que permitían trazar, hacia la solución, el camino real en vano buscado hasta entonces".

Fueron ideas cardinales del pensamiento de Hilbert la unidad de la matemática y la importancia de los problemas en la investigación matemática. Entresacamos así entre sus frases: "En mi opinión la matemática es un todo indivisible, un organismo cuya vitalidad está condicionada por la conexión de sus partes... Con la extensión de la matemática su carácter orgánico no se pierde, sino que se manifiesta con mayor claridad… Los símbolos matemáticos son diagramas escritos, las figuras geométricas son fórmulas gráficas... En la medida en que una rama de la ciencia ofrece abundancia de problemas está viva; la carencia de problemas presagia la extinción o el cese de un desarrollo independiente... Quien persigue métodos sin tener en mente un problema definido, investiga en vano... La convicción de la resolubilidad de un problema matemático

cualquiera es un poderoso incentivo para el investigador. Resuena en nosotros un llamado constante: Hay un problema, busca la solución, la encontrarás razonando, pues en matemática no hay *ignorabimus*".

Con Hilbert ya se penetra en la matemática de este siglo, cuyo espíritu se refleja en las frases anteriores. Su nombre ha de figurar en el desarrollo de todas las ramas de la matemática del siglo actual. En el campo del análisis mencionemos sólo la introducción, entre 1900 y 1910, de los llamados "espacios de Hilbert", que permiten geometrizar el análisis y abren el camino al análisis funcional moderno.

En teoría de funciones, en especial en conexión con la teoría de conjuntos, se destacan a comienzos de este siglo los matemáticos franceses Émile Borel, que ya desde 1898 había introducido una definición de la "medida" que se conoce como “medida B” a la que Henri Lebesgue agregó otra de igual validez: la "medida L", a partir de la cual define en 1902 la integral que lleva su nombre. Por su parte René Baire en 1904 se ocupó con éxito de las funciones discontinuas mientras que Maurice Fréchet introduce, con su tesis de 1906, la importante noción de "espacio abstracto" que en unión con la obra de Hilbert y del estadounidense Eliakim Hastings Moore inicia la marcha del llamado "análisis general" (el nombre es de Moore). Dejando de lado muchas otras innovaciones en el campo del análisis, mencionemos que en 1945 aparece, por obra de Laurent Schwartz, un estudio detallado de nuevos entes, las funciones generalizadas o distribuciones.

Notas complementarias

(1) El problema de la cuadratura del círculo. En 1844 Liouville había demostrado que los números e y e^2 no podían ser raíces de ninguna ecuación cuadrática de coeficientes racionales, mientras introducía el concepto de "números trascendentes", por oposición a "números algebraicos", como aquellos números, cuya existencia demostró ulteriormente, que no podían ser raíces de ninguna

ecuación algebraica de coeficientes racionales. Fundado en los trabajos de Liouville, Hermite demostró en 1873 que el número e es trascendente y algo más tarde, en 1884, Ferdinand Lindemann demostró que también el número π es trascendente. Esta demostración implicaba la solución, en sentido negativo, del problema de la cuadratura del círculo, es decir de la construcción con regla y compás de un segmento lado de un cuadrado equivalente a un círculo de radio dado. En efecto, pueden construirse con aquellos instrumentos los segmentos cuya medida se expresa algebraicamente mediante un número finito de operaciones racionales y de raíces cuadradas, a partir de la medida de segmentos dados o, lo que es lo mismo, pueden construirse los segmentos cuyas medidas son raíces de ecuaciones algebraicas cuadráticas o reducibles a cuadráticas, de coeficientes racionales o irracionales cuadráticos es decir de determinado tipo de números "algebraicos". Ahora bien, la ecuación que traduce el problema de la cuadratura del círculo es $x^2 = \pi$, ecuación cuadrática uno de cuyos coeficientes no es algebraico.

No deja de tener cierto interés el hecho de que la cuadratura del círculo, imposible con regla y compás en la geometría euclidiana es posible en la geometría no euclidiana de tipo hiperbólico.

(2) Los problemas del Congreso de París. Ésta es la nómina de los 23 problemas que enunció Hilbert en París en 1900:

1. El problema de Cantor del número cardinal del continuo.
2. La compatibilidad de los axiomas aritméticos.
3. La igualdad del volumen de dos tetraedros de iguales base y altura (este problema fue resuelto en sentido negativo el mismo año 1900 por un discípulo de Hilbert: Max W. Dehn).
4. Problema de la línea recta como la mínima distancia entre dos puntos.
5. Concepto de Lie de un grupo continúo de transformaciones sin el supuesto de la diferenciabilidad de las funciones que definen el grupo.
6. Tratamiento matemático de los axiomas de la física.
7. Irracionalidad y trascendencia de ciertos números.
8. Problemas acerca de números primos (conjetura de Riemann, de Goldbach).

9. Demostración general de la ley de reciprocidad en cualquier campo de números.
10. Determinación de las condiciones de resolubilidad de una ecuación diofántica.
11. Formas cuadráticas con coeficientes numéricos algebraicos cualesquiera.
12. Extensión del teorema de Kronecker sobre los espacios abelianos para cualquier cuerpo de racionalidad.
13. Imposibilidad de la solución de la ecuación general de 7° grado mediante las funciones de sólo dos argumentos.
14. Demostración de la finitud de ciertos sistemas completos de funciones.
15. Fundamento riguroso del cálculo enumerativo de Schubert.
16. Problema de la topología de curvas y superficies algebraicas.
17. Expresión de formas definidas por cuadrados.
18. Construcción del espacio mediante poliedros congruentes.
19. ¿Son las soluciones de los problemas regulares del cálculo de variaciones siempre necesariamente analíticas?
20. Problema general de los valores de contorno.
21. Demostración de la existencia de ecuaciones diferenciales lineales que poseen un grupo monodrómico prefijado.
22. Uniformación de las ecuaciones analíticas mediante funciones automorfas.
23. Desarrollo ulterior de los métodos del cálculo de variaciones.

Teoría de números y geometría sintética

La teoría de números, iniciada brillantemente por Gauss, encontró un continuador en Dirichlet, a quien se debe en 1825 la demostración del "teorema de Fermat" para n=5, y la aplicación de los métodos infinitesimales a la teoría de números; estudia en especial las propiedades de la sucesión de los números primos. Con Dirichlet se inicia la investigación de la ley de distribución asintótica de los números primos, tema en el cual se ocuparon

muchos analistas, entre ellos el ruso Pafnuti Libovich Chebichev en 1851; mientras que Hadamard y Charles-Jean de la Vallée-Poussin demostraban, independientemente en 1896, que si $\pi(x)$ es el número de números primos menores que x, su cociente por $\frac{x}{l \cdot x}$ tiende a la unidad para $x \rightarrow \infty$.

Además de análisis y de geometría, se ocupó en especial de teoría de números Ernst Eduard Kummer, que hizo progresar el estudio del "teorema de Fermat" logrando su demostración para todos los exponentes primos *n* que no figuren entre los factores del numerador de los *½ (n - 3)* primeros "números de Bernoulli"; de ahí que en la primera centena sólo queden excluidos los números 37, 59, 67. Estos estudios condujeron a Kummer a introducir el importante concepto de "ideal", que en el siglo actual se ha generalizado en distintas direcciones y ha provocado nuevos desarrollos teóricos, tanto en el campo del análisis como en el del álgebra.

Se ocupó de "ideales" un discípulo de Kummer, Leopold Kronecker, que desarrolló además la teoría de los "cuerpos de números" (clase cerrada respecto de la adición, sustracción, multiplicación y división). Kronecker se ocupó, además, de funciones elípticas, mediante las cuales y contemporáneamente con Hermite dio una solución de la ecuación de quinto grado. Más precursor que actor, Kronecker se vincula con los fundamentos de la aritmética al ubicarse dentro de la tendencia que en el siglo actual adoptó el nombre de intuicionista. Según Kronecker toda la matemática debía fundarse sobre el concepto de número natural, únicos entes que tenían existencia asegurada.

Pero mientras los intuicionistas sostenían que esos números eran el resultado de una "intuición básica", para Kronecker lo eran de un acto de fe. "El buen Dios creó el número natural -decía-, el resto es obra de los hombres." Al final llegó hasta a negar la existencia de los irracionales. "¿A qué vienen sus hermosas investigaciones sobre el número π? -Observaba a Lindemann- ¿Por qué elige tales problemas si en verdad no existen números irracionales de ninguna clase?" Fuera de Alemania se ocuparon de teoría de números: en Francia, Liouville y Hermite, y en Gran Bretaña el irlandés Henry John Stephen Smith, quien en 1882

participó en el gran premio de ciencias de la Academia de París que habla propuesto, como tema, la descomposición de un número en suma de cinco cuadrados. Smith presentó una memoria con resultados logrados unos quince años antes, y mereció compartir el premio (póstumo) con el alemán Hermann Minkowsi, matemático muy conocido en este siglo por su contribución a la teoría física de la relatividad, que en 1896 hizo conocer una "geometría de los números" que inició una nueva dirección en los estudios de teoría de números.

Ya en este siglo cabe mencionar progresos en el tratamiento de las ecuaciones diofánticas y que Hilbert, en 1910, resuelve el problema planteado por Waring un siglo y medio antes, tema que fue posteriormente perfeccionado por los ingleses Godofrey Harold Hardy y John E. Littlewood y el ruso Ivan M. Vinogradov. Estos tres matemáticos, con otros, se ocuparon también de la hipótesis de Goldbach, logrando importantes resultados aunque sin llegar a demostrar aquella hipótesis.

Otro problema de teoría de números, el de las "particiones" (número de maneras en que un número natural *n* se descompone en suma de números naturales) iniciado por Euler, logró progresos en 1917 por obra del mencionado Hardy y el hindú Srinivasa Ramanujan. Se conoce la anécdota de este matemático hindú, muerto a los 33 años. Muy enfermo en un hospital inglés, es visitado por Hardy quien comienza su conversación con la frase: "El número de mi taxi era el 1729. Me pareció un número bastante soso", a lo cual replicó Ramanujan: "¡No, Hardy, no! Es un número muy interesante. Es el menor número que expresa la suma de dos cubos de dos maneras diferentes".

Volviendo a la geometría del siglo XIX, cabe advertir que además del advenimiento de las geometrías no euclidianas, importante por más de un concepto, pueden señalarse distintos progresos en las diferentes ramas de la geometría de comienzos de siglo.

Dejando de lado el interés puesto de manifiesto en temas especiales de geometría elemental, que dio lugar a una geometría del triángulo, a una geometría del círculo, a una geometrografía (medida de la simplicidad y de la exactitud de las construcciones), destaquemos el desarrollo y generalidad que logró la geometría

analítica, en medida sin duda insospechada por su ilustre fundador de un par de siglos antes.

El proceso se inicia con la obra de Julius Plücker, en cuyo primer tratado de geometría analítica en dos tomos de 1828-1831, el concepto de coordenada adquiere la categoría de una correspondencia cualquiera entre números y elementos geométricos, y hacen su aparición las coordenadas homogéneas, las trilineales, las coordenadas de recta, de plano, etcétera. En otro de sus escritos se ocupa de la clasificación de las curvas algebraicas e introduce las fórmulas, que llevan su nombre, que vinculan el orden, la clase y el número de las diferentes singularidades de una curva de género dado. En 1865 Plücker introdujo el sistema, más tarde clásico, de definir las rectas del espacio mediante seis coordenadas homogéneas vinculadas por una relación, estudiando así una "geometría reglada" o geometría del "espacio reglado", al suponerlo engendrado por las rectas y no por los puntos como entes fundamentales. Vinculados con estos estudios van surgiendo las geometrías pluridimensionales, ya por influencia del concepto generalizado de coordenada, ya por las ideas de Riemann que, en su memoria sobre las hipótesis en que se funda la geometría había introducido el concepto de variedades *n*-dimensionales. Así, el espacio reglado seria un espacio de 4 dimensiones.

Contribuyeron, entre otros, a perfeccionar los métodos de la geometría analítica el alemán Ludwig O. Hesse, quien introdujo el empleo sistemático de los determinantes (un determinante funcional se llama "hessiano'); el inglés George Salmon, autor de tratados sobre curvas y superficies de gran difusión, y el francés Jean Gaston Darboux que, además de temas de análisis, se ocupó de superficies, geometría reglada,...

Mientras tanto se estaba organizando en forma sistemática el estudio de las propiedades proyectivas de las figuras, iniciado por Desargues y Pascal en el siglo XVII y retomado por Poncelet en el XIX. Pero ni la definición de proyectividad de Poncelet contempla todas las transformaciones gráficas de las figuras, ni sus métodos de demostración poseían ese rigor lógico que se iba imponiendo en la matemática. Construir y organizar una rama científica completa y rigurosa será la obra de un grupo de geómetras del siglo pasado, en su mayor parte alemanes.

Contemporáneo de Poncelet fue August Ferdinand Möbius, que no obstante estudiar la geometría vinculada con la mecánica y con las coordenadas, introdujo una serie de conceptos vitales para la geometría proyectiva. Su obra más importante, *Der Barycentrische Calcul* de 1827 introduce las coordenadas baricéntricas, precursoras de las coordenadas homogéneas. En esa obra introdujo los signos para los segmentos, triángulos y tetraedros, y mostró mediante sus coordenadas como se podían establecer correspondencias biunívocas entre los puntos de dos planos o de dos espacios homónimos, correspondencia que denominó colineación, por el hecho que en esa correspondencia a puntos alineados correspondían también puntos alineados, mientras que denominó correlaciones a otras correspondencias de carácter recíproco, en las cuales a puntos correspondían rectas y recíprocamente. Tales colineaciones y correlaciones integraron más tarde las transformaciones proyectivas. (1)

Contemporáneos de Möbius, fueron Chasles y Steiner, los geómetras más importantes de este período. Michel Chasles publica en 1837 su obra más importante, *Aperçu historique sur l'origine et le developpernent des rnéthordes en géométrie... suivi d'une Memoire de Géométrie sur... La Dualité et I'Omographie*, en la cual estudia las correlaciones y las homografías del espacio y pone, como fundamentos de la geometría, los principios generales que denomina *Deformaciones y transformaciones* de las figuras, que no son sino casos particulares de las actuales homografías o colineaciones.

Chasles introdujo los elementos imaginarios en geometría, aunque no en forma rigurosa, y dio el concepto de razón doble que denominó "razón anarmónica". En este orden de ideas uno de los resultados importantes de la teoría fue logrado por uno de sus discípulos, Edmond Laguerre, quien además de contribuciones al álgebra y a la teoría de funciones, logró en 1853 dar carácter proyectivo a la medida del ángulo de dos rectas.

Con algunos de sus discípulos Chasles estudió la proyección estereográfica, que extendió a todas las superficies de segundo orden adoptando un plano cualquiera como plano de proyección. Además, en conexión con un método llamado de las características, Chasles sentó las bases de una rama de la geometría que estudia la

determinación de puntos, rectas y planos que cumplen ciertas condiciones, rama que más tarde fue desarrollada por Hermann Schubert en su *Kalkul der abzählenden Geometrie* de 1879, mediante un complicado simbolismo. Esta "geometría numerativa" fue rigorizada este siglo, en especial por obra de Van der Waerden.

Progresos importantes se deben a Jakob Steiner que en 1832 publica un tratado sobre el "*desarrollo sistemático de la dependencia mutua de las estructuras geométricas*", en el que descubre los órganos mediante los cuales las más diferentes formas del mundo espacial se conectan entre sí. Con Steiner aparecen las formas geométricas fundamentales. -Puntual, haz de rayos, haz de planos, radiación, etcétera-; la generación por haces proyectivos y el empleo sistemático del principio de dualidad. Partiendo de la generación proyectiva estudia en especial las cónicas y cuádricas, aunque se ocupa también de curvas y superficies de orden superior (2).

Preocupó a Steiner “el fantasma del imaginarismo”, como decía; esto es, las cuestiones que planteaba la introducción de los elementos imaginarios en geometría pero, al igual que los geómetras que lo precedieron, los utilizaba sin dar una definición precisa de ellos. El fundador de la teoría moderna del imaginarismo geométrico debe verse en Ch. Paulus, geómetra alemán que, en sus trabajos de 1853 y 1854, considera sinónimos las expresiones "par de elementos imaginarios e involución elíptica", define algunas operaciones que pueden efectuarse con esos elementos.

Eliminadas las coordenadas, introducido en forma precisa el imaginarismo, la geometría proyectiva pudo organizarse como rama autónoma; su organizador fue Karl Georg Christian von Staudt con su *Geometrie der Lage* de 1847 y, en especial, con los *Beïträge* de 1856, 1857 y 1860, donde expone los elementos fundamentales de la nueva rama geométrica: definición de la proyectividad como correspondencia que conserva las formas armónicas, definidas éstas gráficamente mediante el cuadrilátero completo sin el fundamento métrico de la razón doble; introducción del *sentido* de la involución elíptica para distinguir los dos elementos imaginarios conjugados; extensión de los elementos imaginarios a los espacios de más de una dimensión y las definiciones de las coordenadas proyectivas.

Entre los progresos realizados por la geometría proyectiva, inmediatamente después de Staudt, mencionemos solamente, además de las contribuciones ya citadas de Cayley con motivo de las geometrías no euclidianas, la extensión de las transformaciones proyectivas mediante funciones irracionales, no bilineales, que introdujo para el plano Luigi Cremona en 1863, transformaciones que hoy llevan su nombre y comprenden, como caso particular, las transformaciones cuadráticas, la más antigua e importante de las cuales es la inversión o transformación por radios recíprocos que, al igual que la proyección estereográfica, tiene la propiedad de conservar los ángulos y, por tanto, pertenece a las transformaciones que se denominan *conformes*.

Al principio la geometría analítica y la geometría sintética se enfrentaron como enemigos -en cierta ocasión Steiner declaró que no escribiría más para el "Journal de Crelle" si Plücker continuaba colaborando en él - pero más tarde el método de las coordenadas y el de las proyecciones se combinaron armoniosamente y dieron lugar a una "geometría algebraica" o una "teoría geométrica de las ecuaciones" en la que encontraron cabida las teorías de las formas algebraicas y los métodos infinitesimales. En esta nueva rama, al igual que en el álgebra, donde no hay limitación entre el número de ecuaciones y el número de variables independientes, tampoco hay limitación entre el número *m* de dimensiones de una "variedad algebraica" y el número *n* de dimensiones de su espacio o hiperespacio.

En el desarrollo de la geometría algebraica se destacaron, en especial, los geómetras italianos, iniciando la marcha Giuseppe Veronese con una memoria de 1882 y un tratado de 1891, mientras que dos años después Federigo Enriques hace conocer, en el primer tratado de síntesis consagrado a la teoría de las superficies algebraicas, las investigaciones de la escuela, italiana en ese campo.

El desarrollo ulterior de la geometría en sus nuevas ramas, dependió en parte de la dirección que le imprimió el “Programa de Erlangen” de 1872, al sistematizar la geometría mediante la teoría de grupos, y en parte de las tendencias imperantes en la matemática de este siglo.

Notas complementarias

(1) Otras contribuciones de Möbius. Se deben a Möbius la demostración de la invariancia de la "'razón doble" en las transformaciones proyectivas, el estudio de las actuales trasformaciones por radios recíprocos, que denominó *afinidades circular*, y la *red* de Möbius, más tarde extendida al plano y al espacio, la cual, sobre la recta y a partir de tres puntos, construía ordenadamente otros puntos mediante sucesivas determinaciones de cuartos armónicos, obteniendo no todos los puntos de la recta como creyó Möbius, pero sí un conjunto denso numerable.

Por último, el nombre de Möbius está vinculado a dos cuestiones de índole topológica. Fue el primero que mencionó, en 1840, el *problema de los cuatro colores*, aún hoy no resuelto, que consiste en demostrar que cualquier mapa plano, compuesto de un número finito de regiones de forma cualquiera, se puede colorear con sólo cuatro colores distintos de tal manera que no existan dos regiones con frontera común pintadas con el mismo color. Además, en 1858, Möbius hizo conocer su superficie "unilátera" o "anillo de Möbius", construido de la siguiente manera: sea un rectángulo de vértices opuestos A y C, B y D, y de lado AD suficientemente largo respecto de AB. Si se hacen coincidir los lados opuestos AB y CD de manera que cada vértice coincida con el opuesto, se obtiene una superficie "de una sola cara" en la cual mediante una línea, se puede pasar sobre esta nueva superficie y sin atravesar el contorno, de un punto M a un punto N situados primitivamente en caras opuestas del rectángulo.

(2) El tratado de Steiner. Entre otras investigaciones, Steiner estudia en su *Tratado* una figura a la que dedicaron su atención numerosos geómetras: el “exagrama místico” formado por los 60 exágonos de Pascal, que se obtienen tomando 6 puntos de una cónica y por todas las rectas y puntos vinculados con ellos. Se debe también a Steiner la resolución, en forma geométrica aunque no rigurosa, de problemas de máximo y mínimo que exigen analíticamente los recursos del cálculo de variaciones.

En 1833 demostró que todas las construcciones con regla y compás pueden realizarse con regla y un círculo fijo. Mencionemos por último que entre los numerosos ejercicios que figuran en un *Tratado* de 1832 figura una de las primeras trasformaciones generales cuadráticas: si se tienen dos rectas a y b no coplanares, dos planos α y β que no las contienen y una recta c que se apoya constantemente sobre ellas, cuando c describe en un plano una recta, en el otro describe una cónica.

Las aplicaciones de la matemática

Mientras la matemática como ciencia autónoma exploraba nuevos campos de abstracción creciente, su aplicación a las demás ciencias, se tornó cada vez más indispensable y eficaz. Esa aplicación se extendió de la mecánica y la astronomía a las restantes ramas de la física, más tarde a toda la ciencia natural y, en este siglo, a todos los sectores del saber.

En ocasiones puede hablarse de simbiosis: los nombres del astrónomo Friedrich William Bessel o del físico teórico George Gabriel Stokes se recuerdan en funciones o fórmulas del análisis en cambio, las "ecuaciones de Maxwell" trajeron consigo la predicción de las ondas hertzianas y, a comienzos de este siglo, no dejó, de tener cierta resonancia la aplicación de las geometrías no euclidianas a la teoría física de la relatividad.

Pasando a cuestiones más concretas, digamos que dos ramas de la geometría aplicada logran autonomía en la segunda mitad del siglo: en 1858 Wilhelm Fiedler publica su tratado de geometría descriptiva proyectiva, que sistematiza los métodos de proyección para la representación en el plano de las figuras y cuerpos del espacio; dos años después Karl Culmann inicia sus cursos en el Politécnico de Zurich de una nueva disciplina, la “estática gráfica”, cuyos métodos se revelaron más eficaces que los de la estática analítica.

En este orden de ideas es interesante señalar la creación, hacia fines del siglo pasado, por influencia de las ideas de Klein y por

obra especial de Carl Runge, de una rama de la matemática con métodos y caracteres propios, que tomó los nombres de "matemática aplicada" de "cálculo numérico" (con este nombre la gran *Enciclopedia de las ciencias matemáticas* de Leipzig le dedica en su primer tomo de 1898-1904 un artículo de casi ciento cincuenta páginas), de "matemática de aproximación", el nombre sin duda más adecuado, pues de eso se trata. Partiendo del supuesto que en toda aplicación práctica de la matemática el objetivo final es un resultado numérico y que éste por esencia ha de ser aproximado, tiene sentido un cuerpo de doctrina y un campo propio de investigaciones que tiende a crear y estudiar los métodos numéricos) gráficos o mecánicos que permiten obtener esos resultados numéricos con la aproximación deseada.

Los métodos numéricos incluyen todo lo referente a las aproximaciones numéricas, a la construcción y manejo de tablas numéricas, a la determinación de funciones empíricas periódicas o no que satisfacen ciertos datos experimentales. Incluyen también los variados métodos aproximados que se han ideado para la resolución numérica, ya de las ecuaciones o sistemas de ecuaciones algebraicas y trascendentes, ya de los distintos problemas que se presentan en el análisis: cálculo práctico de series, aplicación de fórmulas de interpolación y cuadraturas e integración de ecuaciones diferenciales sobre este último tema y llegando a la integración numérica de ecuaciones diferenciales con derivadas parciales, Runge y Fr. A. Willers produjeron en 1915 un artículo de más de un centenar de páginas en la Enciclopedia.

Por supuesto que tales métodos no son todos del siglo XIX. En verdad puede decirse que las aproximaciones numéricas nacen con los primeros cálculos aritméticos y que los métodos numéricos de aproximación son coetáneos con el álgebra y con el cálculo infinitesimal. Por eso es frecuente unir algunos de esos métodos con nombres de matemáticos famosos, Newton, Fourier, Gauss, que los idearon y practicaron. El siglo XIX los ha agrupado y perfeccionado, mientras aportaba nuevos métodos y nuevas ideas. Como único ejemplo mencionemos el método, que expuso en 1837 el suizo Carl Heinrich Graeffe, para la obtención aproximada de todas las raíces, reales o imaginarias, simples o dobles, de una ecuación algebraica mediante un proceso en el cual, haciendo cada

vez mayor el módulo de las raíces, cada una de ellas puede calcularse despreciando las de módulo inferior.

Los métodos gráficos se proponen resolver en forma aproximada los mismos o gran parte de los problemas que resuelven los métodos numéricos, ya mediante el llamado “cálculo gráfico”, es decir mediante trazados gráficos en los cuales, para cada problema particular, las construcciones geométricas realizadas con los datos permiten determinar gráficamente el resultado ya mediante los "nomogramas", o tablas gráficas con los cuales, construidas de una vez por todas esa tabla o nomograma para determinada fórmula, una simple lectura permite obtener los valores numéricos que la satisfacen. Citemos, dentro del primer tipo, los distintos métodos de integración gráfica, con frecuencia traducción de métodos numéricos, y dentro del segundo tipo de nomogramas de puntos alineados que desde 1891 hizo conocer Maurice D'Ocagne, quien mediante una feliz aplicación del principio de dualidad logró desterrar los complicados y enmarañados ábacos cuadriculados, sustituyéndolos por los más cómodos y claros nomogramas de puntos alineados. (1)

Los métodos mecánicos, por su parte, incluyen la variada gama de máquinas de calcular y máquinas analíticas, los numerosos tipos de reglas y círculos calculadores, y los aparatos e instrumentos de integración: planímetros, intégrafos, analizadores armónicos,... “Una idea de su número y variedad, hasta fines del siglo pasado, puede darla el *Catálogo de modelos, aparatos e instrumentos de matemática y físico-matemática* de Walther Dyck, editado por la Sociedad de Matemáticos Alemanes en 1892, con un Apéndice de 1893, que comprende cerca de500 ítems.

La historia del cálculo mecánico viene de lejos; ya mencionamos las máquinas de Pascal y de Leibniz, aunque es en el siglo pasado que ese cálculo toma auge. Desde 1820 y durante medio siglo Charles Babbage se ocupó de la construcción de sus "máquinas analíticas", precursoras de las actuales computadoras, tarea que retomó en 1893 el español Leonardo Torres Quevedo con sus máquinas algebraicas, aunque ninguno de los dos pudo superar las posibilidades teóricas de la construcción. En 1818 el polaco Bruno Abdank-Abakanowicz comercializa su intégrafo, es decir un aparato que dibuja la curva integral re- corriendo una punta la

gráfica de la función integrando; durante el siglo las máquinas de sumar se perfeccionan, se comercializan y se difunden. En 1881 aparecen las máquinas que multiplican directamente, es decir que con un solo golpe de manija la máquina da el resultado producto de un número por un dígito, ventaja que resultó aparente al aplicarse electricidad a la máquina; de ellas es conocida la "Millonaria" patentada en 1892 por Otto Steiger. Con todo, estas máquinas resultaban insuficientes en la compilación de datos estadísticos cada vez más numerosos y complicados, de ahí la importancia del invento de la máquina para tabular datos mediante tarjetas perforadas que en 1889 patenta el estadounidense Hermann Hollerith. Sucesivos perfeccionamientos convirtieron esa máquina en una cabal computadora mecánica hasta el decenio de 1940, cuando la electrónica provocará una verdadera revolución en el cálculo mecánico, revolución que aún está en marcha. La primera máquina automática de calcular electromecánica fue la Mark I de Harvard, que entró en funcionamiento en 1944, aunque se trabaja en ella desde 1938. Dos años más tarde se completó en la Universidad de Pensilvania la primera computadora electrónica, la ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Calculation Computer) capaz de hacer 5000 sumas por segundo, que abrió el camino de una tecnología destinada a producir carmbios profundos en muchos dominios más que la matemática aplicada.

Notas complementarias

(1) Los nomogramas de D'Ocagne. Aunque al comienzo D'Ocagne expuso sus nomogramas utilizando coordenadas de recta, pueden estudiarse utilizando coordenadas comunes. Veamos un ejemplo para dar cuenta de la innovación que aportaron. Sea una función de tres variables z_1, z_2, z_3 que indicamos mediante subíndices $F_{123} = 0$ y supongamos que pueda escribirse en la siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0$$

Como es posible, eventualmente mediante operaciones lograr que los elementos de una columna sean todos distintos de 0, es el determinante anterior, dividiendo por los términos de esa columna, podrá escribirse la forma:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que es la condición, en coordenadas cartesianas, de alineación de tres puntos de coordenadas $(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)$. Como cada una de estas parejas no es sino la ecuación paramétrica de curvas de parámetros $z_1,\ z_2,\ z_3$, respectivamente, resultará que si se dibujan las tres curvas y se acotan, es decir, si se marca un número suficiente de puntos y en algunos de ellos el valor correspondiente del parámetro, se tiene el monograma de puntos alineados de la función $F_{123} = 0$, por cuanto las cotas de tres puntos alineados satisfacen la función, de ahí su manejo y uso.

Un caso relativamente frecuente es el de la función de la forma $f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0$ cuyo nomograma está constituido por dos escalas rectilíneas de soportes paralelos y una escala curvilínea, representadas respectivamente por:

$$\left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ y_1 = m_1 f_1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x_2 = d \\ y_2 = m_2 f_2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x_3 = \dfrac{m_1 d h_3}{m_1 h_3 + m_3 g_3} \\ y_3 = \dfrac{-m_1 m_2 f_3}{m_1 h_3 + m_2 g_3} \end{matrix}\right\}$$

donde $m_1,\ m_2$ y d son valores que se eligen adecuadamente para dar a las escalas la extensión y precisión necesarias.

HACIA LA MATEMÁTICA DEL SIGLO XX

La teoría de grupos

Las geometrías no euclidianas y la aritmetización del análisis, que figuran entre las primeras manifestaciones de la matemática del siglo XIX, fueron en parte el resultado de una vuelta al rigor geométrico y a la obediencia a las exigencias de la lógica, que la pasión por el algoritmo y las urgencias de las aplicaciones habían eclipsado.

Tales manifestaciones introdujeron sin duda innovaciones, aunque éstas en general se mantuvieron dentro del canon de la matemática clásica. Será por otros caminos que aparecerán en el siglo XIX las semillas que han de fecundar la matemática del siglo XX. Una de esas semillas es la teoría de grupos, que nace en conexión con el problema, candente a comienzos del siglo XIX, de la resolución de las ecuaciones algebraicas de grado superior al cuarto.

En este sentido el primer progreso importante fue la demostración de la imposibilidad de resolver la ecuación de quinto grado (y de grado superior) mediante radicales.

El primero en demostrar esa imposibilidad, aun en forma restringida, fue el italiano Paolo Ruffini, conocido por lo demás por su método de resolución numérica de ecuaciones algebraicas.

La demostración de Ruffini apareció en su tratado general acerca de las ecuaciones de 1799 que, ante las críticas que suscitó, mejoró y amplió en 1813. La primera demostración rigurosa del teorema es de Abel de 1826.

Con Ruffini aparece la nueva idea de "grupo", que llamaba "permutaciones", y que Cauchy desarrolló bajo el nombre de "sistemas conjugados de sustituciones", pero el cabal fundador de la teoría de grupos es Evariste Galois, uno de los matemáticos precoces de mayor genio, cuya vida breve y agitada fue fiel reflejo de la época romántica en que le tocó actuar.

Sus primeros trabajos sobre fracciones continuas, cuestiones de análisis y teoría de las ecuaciones, y teoría de números son de 1829 y 1830, mientras que en 1831, expulsado de la Escuela Normal donde estudiaba, anuncia un curso privado de álgebra superior que abarcaría "una nueva teoría de los números imaginarios, la teoría de las ecuaciones resolubles por radicales, la teoría de números y la teoría de las funciones elípticas tratadas por álgebra pura", curso que no tuvo oyentes. Más tarde redacta una memoria donde aparece la hoy llamada "teoría de Galois", mientras que la noche anterior al duelo, en el que muere, lega a un amigo, en notas apresuradas, su testamento científico, donde le pide que, si su adversario vence, haga conocer sus descubrimientos a Gauss o a Jacobi para que expresen su opinión "no respecto de la verdad, sino de la importancia de los teoremas. Espero que más tarde alguien encuentre provechoso descifrar todo este lío". Este "lío" (*ce gâchis*) es hoy la teoría de grupos.

Los escritos de Galois, y sólo parcialmente, no se conocieron hasta 1846 por obra de Liouville; Jules Tannery los completó en 1910. En esos escritos asoman la idea de "cuerpo" desarrolladas luego por Riemann y Dedekind, que Galois introduce con motivo de los hoy llamados "imaginarios de Galois", y las propiedades más importantes de la teoría de grupos, nombre que él acuña, en el sentido actual de clase cerrada respecto de la adición y sustracción. Sin duda que esta noción, en especial referida al grupo de sustituciones, estaba esbozada en los trabajos de Lagrange y Vandermonde del siglo XVIII y en los de Gauss, Abel, Ruffini y Cauchy del XIX, e implícita en problemas de teoría de las ecuaciones, teoría de números y de transformaciones geométricas, pero será Galois quien muestre una idea clara de la teoría general, con las nociones de subgrupo y de isomorfismo.

En la segunda mitad del siglo la teoría de grupos encuentra nuevas aplicaciones. En 1854 Cayley la aplica a los cuaternios y en 1856 Hamilton a los poliedros regulares, mientras que Camille Jordan, con su clásico *Traité des Substitutions* de 1870, pone de relieve la teoría como factor de unificación de sectores diversos de la matemática. A Jordan se debe también una noción de curva muy general, la llamada "curva de Jordan", como conjunto de puntos en

correspondencia biunívoca y continúa con los puntos de un segmento.

Fueron dos matemáticos que asistieron a las clases de Jordan, Klein y Lie, quienes explotaron el poder unificador y sistematizador de la teoría de grupos.

Combinando el desarrollo alcanzado por las geometrías no euclidianas y la geometría proyectiva con la teoría de los invariantes y la teoría de grupos, Klein, en su ya clásico *Programa de Erlangen* de 1872, expuso una sistematización y jerarquización de todas las geometrías, viejas y nuevas, mediante grupos y subgrupos, concibiendo como objeto de cada geometría el estudio de propiedades invariantes respecto de un determinado grupo de transformaciones y considerando cada geometría como subgeometría de otra, a la que se agrega cierta figura básica que ha de permanecer invariante. Más tarde, en 1884, ofreció un ejemplo de dos grupos isomorfos: el de las rotaciones del icosaedro regular y el de la ecuación de quinto grado.

Mientras Klein estudia grupos discontinuos, Sophus Lie aborda, también a partir de 1872 el estudio que ya mencionamos de los grupos continuos de transformaciones y. su clasificación y aplicación a la integración de ecuaciones-diferencias con derivadas, parciales. Sus trabajos y los de sus discípulos aparecieron hacia fines de siglo. Por lo demás, los llamados "grupos de Líe" han merecido en este siglo numerosos estudios.

La teoría de grupos culmina hacia 1880, al asomar los grupos abstractos, y entra en su faz moderna con la memoria de Ernst Steinitz de 1910 (impresa en libro en 1930); la teoría iniciada por Galois adquiere así caracteres de estructura algebraica.

En su evolución, la teoría de grupos ofrece un ejemplo que muestra la distinción entre la matemática clásica y la matemática de hoy. En ambas priva la abstracción como proceso básico, pero mientras en la matemática clásica ese proceso parte de entes concretos -objetos del mundo exterior, sensibles o no, operaciones, etcétera- en la matemática de hoy el proceso de abstracción elimina toda referencia a entes concretos y prescinde por completo de la "naturaleza" de lo que en él interviene, para dejar sólo el esquema formal de los entes y relaciones abstractos que definen la estructura y convertir la matemática, según Bourbaki, en "el

estudio de las relaciones entre objetos que, en forma deliberada, no se conocen, y sólo se describen por algunas de sus propiedades, precisamente aquellas que se adoptan como axiomas básicos de su teoría". En el caso de los grupos el proceso de abstracción descarnó el grupo de sustituciones de Galois, punto de partida de la teoría, para convertirlo en un grupo abstracto de máxima generalidad, ya que aquel grupo de sustituciones, o cualquier grupo isomorfo con él, es sólo un modelo o interpretación del grupo abstracto.

Nota complementaria

(1) El método de Ruffini. Este método fue publicado en 1804 y en su esencia coincide con el método de William C. Horner, aparecido en 1819 y conocido como "esquema de Horner", reservando para Ruffini el método práctico que permite determinar los coeficientes del cociente de la ecuación por sus factores lineales, procedimiento que ideó Ruffini para facilitar los cálculos. Matemáticos chinos del siglo XIII fueron lejanos precursores del método de Ruffini-Horner.

El álgebra y las álgebras

Hacia mediados del siglo pasado el álgebra se enriquece con un nuevo campo de investigaciones: el estudio de las formas algebraicas y la teoría de los invariantes respecto de cierto grupo de transformaciones. El fundador de estos estudios debe verse en George Boole que en 1841 expone explícitamente el concepto de invariancia, aunque el estudio, sistemático de las formas algebraicas y de los invariantes fue realizado a partir de 1845 por la pareja de matemáticos ingleses ya citados, Cayley y Sylvester, que colaboraron científicamente y fueron alguna vez socios (Cayley como abogado y Sylvester como actuario). En Francia la teoría fue continuada por Hermite que, según se expresó en alguna ocasión, constituyó con los dos ingleses la "trinidad invariantiva"; en Italia

por Brioschi y en Alemania por Rudolf Friedrich A. Clebsch, Klein y, en especial, por Paul Gordan, "el príncipe de los invariantes", que hacia 1868 enunció un importante teorema que lleva su nombre, y sobre todo por Hilbert, quien en 1890 extendió el teorema de Cardan y expuso los fundamentos de la teoría de forma tan breve, casi sin cálculo, que hizo exclamar a Gordan: "¡Esto no es matemática, es teología!"

Con Hilbert se abre uno de los caminos que condujo al álgebra moderna; otro será resultado de la creación de nuevos entes algebraicos, que pondrán de manifiesto el carácter básico de las hoy llamadas "leyes de composición", noción abstracta, implícita en la matemática desde sus comienzos, que amplió considerablemente el campo del álgebra.

El primero y más antiguo de estos entes es el vector, que si bien era utilizado en mecánica en la composición de fuerzas y velocidades ya desde fines del siglo XVII, entre los matemáticos no tuvo repercusión hasta el siglo pasado, cuando Gauss utiliza implícitamente la suma vectorial en su representación geométrica de los números complejos en el plano, cuando Möbius expone en su ya mencionado ''*cálculo baricéntrico*" de 1827 aplicaciones geométricas donde las coordenadas tienen un sentido aritmético, no geométrico, y cuando Giusto Bellavitis desarrolla, entre 1832 y 1837, con sus "equipolencias", un conjunto de operaciones con cantidades dirigidas que equivale al cálculo vectorial de hoy.

El paso siguiente lo dará Hamilton, científico múltiple que se ocupó de astronomía, de física y de matemática. Se le debe el nombre de vector y la creación de un sistema de números complejos de cuatro unidades, que denominó "Quaternions" (cuaternios), que satisface todas las propiedades de las operaciones de la aritmética ordinaria con excepción de la propiedad conmutativa de la multiplicación, resultando por tanto el primer ejemplo de cuerpo no conmutativo en el campo real. En verdad, no sólo el primero sino el único, como demostró Georg Frobenius en 1879. Los cuaternios aparecieron en 1843, aunque Hamilton dio sus *Lectures on Quaternions*, con el estudio completo del tema, en 1853. En este tratado Hamilton introduce las matrices, como extensión del concepto de determinante, aunque el cálculo de matrices será desarrollado algo más tarde, en 1858, por Cayley, a

quien se le debe el nombre y su extensión al espacio pluridimensional.

Mientras la obra de Hamilton se difundió con relativa rapidez no ocurrió lo mismo con la de Hermann G. Grassmann, hombre de ciencia original, teólogo y lingüista que, a los 53 años, desengañado por el escaso éxito de sus trabajos matemáticos, se dedicó al estudio del sánscrito. Su obra matemática importante es de 1844 y se la conoce con el titulo abreviado: *Ausdehnungslehre* es decir "teoría de la extensión" (existe versión española con este título, B. Aires, 1947) aunque su título completo alude a "una nueva disciplina matemática expuesta y aclarada mediante aplicaciones". El tratado de 1844 trata la "parte lineal" de la teoría y la amplió en publicaciones de años posteriores (1862,1878), pero su manera algo inusitada y en exceso filosófica para los matemáticos de la época, hizo que esta obra pasara inadvertida. Sólo más tarde, y muerto su autor, se reconoció amplia generalidad y, total abstracción de este cálculo algebraico-geométrico en un espacio de *n* dimensiones con importantes aplicaciones, en el que aparecen conceptos básicos del cálculo vectorial como “producto interno, producto externo”, etcétera.

Mientras el análisis vectorial prosigue su marcha –el físico Maxwell en su célebre *Treatise* de 1873, lo utiliza con una concepción propia e introduce los conceptos de “rotor” y “divergencia”; el estadounidense Willard Gibbs, conocido por sus estudios de química física sobre el equilibrio de los sistemas químicos, lo aplica a la mecánica celeste (1)- y se discute o se polemiza acerca de la mejor notación, entre las múltiples propuestas surgía una disciplina vecina, prolongación del análisis vectorial; el análisis tensorial. Implícito en la obra de Grassman, en su creación tuvieron influencia las ideas de Riemann expuestas en su célebre memoria de 1854.

La palabra "tensor", introducida en 1898 por el físico alemán Woldemar Voigt, procede del campo de la teoría de la elasticidad, y designa el sistema de seis números que caracteriza el estado de tensión de un punto en un sólido deformado. El cálculo tensorial fue organizado sistemáticamente por Elwin B. Christoffel en 1869, introduciendo las derivadas que más tarde se llamaron *invariante y covariante*, mientras que le dieron forma definitiva los italianos

Gregorio Ricci y su discípulo Tullio Levi Civita en una memoria de 1901, *Méthodes du calcul differentiel absolu et leurs applications*, que se tornó célebre cuando Einstein acudió a ese instrumento para desarrollar su teoría general de la relatividad (1916).

También se ocupó de análisis vectorial el inglés Oliver Heaviside, quien expuso en 1892 un "cálculo operacional" que permitía trasformar las ecuaciones diferenciales en algebraicas, que utilizó en sus investigaciones acerca de las líneas y redes eléctricas. Expuesto de modo recetario, sin fundamentos rigurosos, fue discutido y rechazado por los matemáticos. Sin embargo, el cálculo operacional fue justificado en 1929 y constituye un método, aplicable no sólo a la electricidad, sino también a la óptica y la acústica. Mencionemos que en el siglo actual ocurrió algo semejante con los *deltas* de Dirac.

Después de 1870 puede suponerse un nuevo progreso hacia una concepción cada vez más abstracta de las construcciones algebraicas, en la obra del estadounidense Benjamín Peirce sobre las álgebras lineales asociativas. Se establecen allí los conceptos de elementos *nilpotentes e idempotentes*, cuyo estudio inició al autor en 1864 aunque no se publicó hasta después de su muerte en 1881. Esas investigaciones fueron continuadas por su hijo Charles S. Peirce, que se ocupó además de lógica matemática.

En este siglo, en cuya tercera década sobresalen los nombres de Emmy Noether, Emil Artin y Van der Waerden, las investigaciones algebraicas revelan la gran variedad de estructuras algebraicas o álgebras, así como la fecundidad de la noción abstracta de ley de composición, culminando así un proceso que de un álgebra como teoría de las ecuaciones, de comienzos del siglo pasado, llega al álgebra de hoy como estudio de las estructuras algebraicas.

Con las investigaciones algebraicas se vincula el desarrollo de una rama de la matemática que, nacida hace un par de siglos, se ha renovado totalmente y se ha enrolado en la tendencia abstracta de la matemática de hoy, la topología algebraica.

Nota complementaria

(1) El "fenomemo" de Gibbs. Aun a título de mera, curiosidad mencionemos un "fenómeno" vinculado con el nombre de Gibbs, que se presentó en la determinación mecánica de los coeficientes de la serie de Fourier. Tal determinación, así como la operación inversa de calcular la suma de los términos de una serie trigonométrica, se realizaba el siglo pasado mediante instrumentos denominados analizadores armónicos; la Universidad de Chicago disponía de uno de ellos, que permitía sumar hasta 160 términos de la serie. Al utilizarse el instrumento en un caso especial, aparecieron dos prolongaciones rectilíneas inexplicables, que al principio se atribuyeron a una imperfección del aparato, pero Gibbs pudo demostrar en 1899 la necesidad de la presencia de esos dos segmentos rectilíneos.

La lógica matemática

A mediados del siglo XIX el álgebra invade un campo virgen o casi virgen: la lógica. Sin duda, hacia esa época los desarrollos de la lógica y de la matemática mostraban una diferencia profunda. Mientras que en lógica las leyes del silogismo aristotélico se mantenían sin mayores adiciones o perfeccionamientos, el rozamiento matemático, independizándose cada vez más de aquellas leyes, seguía progresando y produciendo nuevos brotes.

Hacia el siglo XVII comenzó a advertirse cierta analogía entre la reducción algebraica y las reglas silogísticas, en vista de que tanto en un caso como en el otro las letras "vacías" del álgebra podían llenarse con entes cualesquiera y por tanto, también con proposiciones.

Estas ideas encuentran una primera expresión en Leibniz, quien desde su juventud, en pos de "un alfabeto de los pensamientos humanos" y de "un idioma universal", se propone construir una

"característica universal", especie de lenguaje simbólico capaz de expresar sin ambigüedad todos los pensamientos humanos. De manera que "al surgir una controversia entre dos filósofos, éstos la zanjarían a la manera de los calculistas. Bastaría, en efecto, sentarse ante los ábacos, pluma en mano, y como buenos amigos decirse: calculemos".

Estas ideas, precursoras de muchos conceptos actuales, no tuvieron entonces mayor influencia, de ahí el estancamiento que se advierte en este sentido en el siglo XVIII y comienzos del XIX, sin dejar de señalarse las ideas prevalecientes de Kant, para quien no era necesaria "ninguna nueva invención en la lógica".

Las cosas cambian en la primera mitad del siglo pasado por obra especial de matemáticos ingleses, ya sea el grupo de los fundadores de la "Analytical Society": Peacock, Babbage y Herschel que acentuaron el carácter lógico de los fundamentos de la matemática, ya sea en Augustus de Morgan, matemático original, según el cual los dos ojos de las ciencias exactas son la lógica y la matemática, que introdujo en 1838 la expresión "inducción matemática", con el sentido corriente de hoy y publicó además una ingeniosa y ya clásica *Colección de paradojas* (póstuma, 1872).

Es posible que esos autores influyeran en George Boole, quien se ocupó del tema desde 1847 y publicó en 1854 su obra *The laws of Thught* que lo convirtió en el cabal fundador de la lógica simbólica. Según Boole el objeto del libro era "investigar las leyes fundamentales de las operaciones de la mente, en virtud de las cuales se razona; expresarlas en el lenguaje de un cálculo y sobre tal fundamento establecer la ciencia de la lógica y construir su método; hacer de ese método la base de un método general para la aplicación de la teoría matemática de las probabilidades y, finalmente, recoger de los diversos elementos de verdad que surgen en el curso de esta investigación algunas informaciones probables referentes a la naturaleza y constitución de la mente humana… "

Si bien se advierte en estos párrafos cierta heterogeneidad en la finalidad y contenido del libro de Boole, su contribución al desarrollo de la lógica matemática fue permanente y de tal importancia que hizo decir a Bertrand Russell que "la matemática pura fue descubierta por Boole". Aunque en esta frase pueda verse

el matiz partidario del logicista Russell, es indudable que el libro de Boole abrió nuevos horizontes a la investigación lógica, que a partir de él prosiguió en dos direcciones: por un lado hacia una estructura más rigurosa de la lógica misma, dirección que culmina en la monumental obra de Ernst D. Schröder sobre "álgebra de la lógica", en cuatro volúmenes aparecidos entre 1890 y 1905 y, por el otro, hacia una vinculación cada, vez más estrecha entre la matemática y la lógica, para confundirse ambas y culminar en las actuales "álgebras de Boole".

La construcción de formalismos lógicos, en vista de su aplicación a los fundamentos de la matemática, se inicia en forma independiente por Ch. S. Peirce en Estados Unidos y por Friedrich Gottlob Frege en Alemania.

Peirce fue un filósofo, que se cuenta entre los fundadores del pragmatismo norteamericano y un matemático que se ocupó de lógica matemática, perfeccionando la lógica de Boole e introduciendo nuevos conceptos, como los de "valores y tablas de verdad". Por su parte Frege, en los trabajos que publicó desde 1879 hasta comienzos de este siglo, expuso en forma precisa y minuciosa conceptos cuya importancia se pondrá de manifiesto más tarde, tanto en lógica como en matemática, pero que en su tiempo, en parte por el complicado e inusitado simbolismo empleado, no ejercieron mayor influencia y sólo se difundieron en el siglo actual, en especial por obra de Russell.

Mientras tanto aparecía la contribución de los "logísticos" italianos encabezados por Giuseppe Peano, que cristalizó en los "formularios matemáticos", aparecidos a fines de siglo, en los que se propuso exponer, en un lenguaje puramente simbólico, no sólo la lógica matemática sino también los resultados más importantes de diversas ramas matemáticas. Si bien la labor de Peano y de sus colaboradores fue criticada en sus comienzos, más por el exceso de ciertas pretensiones de la doctrina que por el empleo exclusivo de símbolos que daban a los escritos un aspecto desusado, el saldo definitivo fue favorable, pues buena parte de los símbolos de Peano, los de pertenencia, unión, intersección, etcétera, se conservan actualmente.

Por otra parte, esa labor contribuyó a robustecer la corriente que puso cada vez más en evidencia las conexiones de la lógica con

la matemática. Esa corriente desembocó, ya en el presente siglo, en los *Principia mathematica* que Russell publicó, en colaboración con Alfred North Whitehead, matemático de mentalidad filosófica, entre 1910 y 1913, obra de síntesis en la que se combinan armoniosamente los resultados de Frege y de Peano o, como dice Bourbaki, "la precisión de Frege con la comodidad de Peano", y que representa, a comienzos de este siglo, la expresión más acabada de la lógica matemática o mejor, de acuerdo con su orientación, de la matemática como lógica.

Los progresos de la lógica matemática en el siglo XX se vinculan en parte con la cuestión que se suscitó respecto de los fundamentos de la matemática. Mencionemos en este sentido la aparición de las lógicas plurivalentes, que se inicia con las lógicas trivalentes, que introduce Luitzen E. J. Brouwer en conexión con su concepción intuicionista, y culmina con el concepto de valor continuo de la verdad, valor intermedio entre el 1 que expresa la verdad y el 0 que expresa falsedad que recibe el nombre de probabilidad, concepto introducido en 1932 por Hans Reichenbach como base para una teoría matemática de las probabilidades.

Axiomática

Una consecuencia del análisis lógico de los fundamentos de la matemática fue la crítica y consiguiente actualización del método axiomático, instaurado, como vimos, por Euclides con sus clásicos *Elementos* y aplicado posteriormente por matemáticos antiguos y modernos. Pero el sistema euclidiano, al ser puesto en tela de juicio con la aparición de las geometrías no euclidianas, fue obligado a una revisión de sus fundamentos, que puso en evidencia sus debilidades lógicas, las que, a fines de siglo, mostraron su presencia no sólo en la geometría sino en la matemática toda, con la consecuencia de una revisión del método axiomático en sí.

En este sentido puede decirse que tal revisión se inicia con las *Lecciones de geometría moderna* de Moritz Pasch, profesadas en 1873 y publicadas en 1882, donde por primera vez se presenta un

sistema completo de postulados suficiente para exponer rigurosamente la geometría proyectiva. Aunque Pasch confiere aún ciertos rasgos físicos a los entes geométricos, insiste en que la construcción así fundada es independiente de ellos y no tiene por qué apelar a la intuición; no deja de ser sintomática su advertencia, hoy trivial pero sin duda útil en su época, de no omitir en sus "razonamientos ni aun los argumentos más insignificantes".

En la dirección axiomática siguen los trabajos de Dedekind, que en 1888 expuso un sistema completo de axiomas sobre los cuales fundar la aritmética, y los de Peano quien en 1889 hizo conocer un ensayo, *Los principios de la geometría expuestos lógicamente*, en el cual todas las proposiciones se expresan en forma puramente simbólica y solo las notas están en italiano. Mayor difusión tuvo otro ensayo del mismo año, en este caso con las notas en latín, sobre *Los principios de la aritmética expuestos según un nuevo método*, que se reproduce algo modificado en el *Formulario* de 1891 (1).

Después de Peano cabe mencionar a uno de sus discípulos, Mario Pieri, que introdujo en 1897 el movimiento como concepto primitivo de la geometría euclidiana y, ya en este siglo, al estadounidense Edward Vermilye Huntington que formuló sistemas de postulados para distintas disciplinas matemáticas. Pero el verdadero sistematizador del pensamiento axiomático en general fue Hilbert con sus famosos *Grundlagen der Geometrie* de 1899, que confieren sello riguroso al tradicional método euclideo y lo convierte en un proceso de alcance mayor y fecundo en problemas de toda índole. (2)

Notas complementarias

(1) La axiomático de Peano. Los axiomas de Peano, expresados con símbolos lógicos son nueve, pero cuatro de ellos no son sino la definición por abstracción de la igualdad, mientras que los cinco restantes, expresados en lenguaje común, son:

1º. *l* es un número;

2º. si n es un número su sucesivo $(n + 1)$ es un número;
3º. si dos números son iguales, sus sucesivos también lo son;
4º. l no es sucesivo de ningún número;
5º. toda propiedad que pertenece al número l, si al pertenecer al número x pertenece también al sucesivo, es una propiedad de todos los números.

El último axioma no es sino el principio de inducción completa que vimos aplicado por Maurolyco, que deja ahora de ser un principio extra matemático o un método de demostración para convertirse en lo que verdaderamente es: la esencia de la definición del número natural o, mejor, de la sucesión natural, como una cadena que posee un primer eslabón y en la que a cada eslabón sigue otro. Esa cadena, por lo demás, es la más simple y la sucesión, por su parte, es el conjunto infinito mínimo entre todas las cadenas y los variados conjuntos que satisfacen los cuatro primeros axiomas.

En el lenguaje axiomático el sistema de Peano contiene tres ideas primarias: uno (o cero), número y sucesivo, es decir que los axiomas de la aritmética ordinaria, expresados con el simbolismo lógico, contienen, además de los signos de las constantes lógicas, sólo tres signos nuevos: el de número, el de uno (o cero) y el de sucesivo.

(2) La axiomática de Hilbert. Una reseña de los *Grundlagen* de 1899 puede dar idea del método axiomático instaurado por Hilbert. Comienzan con la siguiente "Aclaración. Pensemos tres diferentes clases de objetos. Llamemos a los objetos de la primera clase puntos… a los objetos de la segunda, rectas… y los objetos de la tercera, planos… ". Según una anécdota muy difundida Hilbert aclaraba su "aclaración" diciendo que podían sustituirse las palabras: punto, recta y plano por mesa, silla y vaso de cerveza, sin que esto alterara en lo más mínimo la geometría resultante, lo que equivale a subrayar el carácter arbitrario del nombre de los objetos, que se convierten en entes abstractos definidos implícitamente por los axiomas, de ahí la expresión "definiciones disfrazadas" con que Poincaré designada los axiomas. En efecto según Hilbert: "Supongamos que puntos, rectas y planos estén en ciertas relaciones mutuas, Que designaremos con las palabras

“estar en”, "entre", "paralelo", "congruente", "continuo", cuya exacta y completa descripción se logrará mediante los axiomas de la geometría".

Los axiomas sobre los cuales Hilbert funda la geometría euclidiana son veinte, distribuidos en cinco grupos: de enlace, de orden, de paralelismo, de congruencia y de continuidad. Los axiomas de enlace definen las relaciones entre puntos, rectas y planos, que dan sentido a las expresiones "estar sobre", "pasar por", etcétera. Los axiomas de orden cumplen igual finalidad respecto de expresiones como '"entre" u “ordenamiento", y permiten definir el segmento. Cabe agregar que entre los postulados de Euclides figuran algunos de los axiomas de enlace de Hilbert; en cambio Euclides no menciona para nada la idea de orden y adopta el segmento como noción primitiva y el ordenamiento como algo dado empíricamente, lo que le permite soslayar sofismas en que podría incurrir en un tratamiento riguroso que no tomara en cuenta los axiomas del orden. Estos axiomas, ya utilizados por Pasch, y su exigencia en la construcción geométrica, constituyen uno de los progresos que la crítica moderna puso en evidencia en el análisis de los principios de la geometría. Por su parte, el axioma de paralelismo, que admite la existencia de una y una sola recta paralela a otra dada por un punto exterior a aquélla, equivale al Quinto postulado de Euclides, mientras que los axiomas de congruencia, cuyos equivalentes son las "nociones comunes" de Euclides, definen el concepto de congruencia o de movimiento de segmentos, ángulos (que se definen en forma correlativa a los segmentos) y triángulos. Por último, Hilbert admite como axioma de continuidad una expresión que equivale a la definición de Euclides, y que Hilbert denomina con razón "axioma de Arquímedes".

Después de exponer y aclarar sus axiomas, Hilbert recurre en sus *Grudlagen* a una novedad importante, al abordar el análisis lógico del conjunto de axiomas y exigir, por una parte, su compatibilidad, es decir que no exista en ellos contradicción interna y, por otra, que sean independientes, o, lo que es lo mismo, que un grupo de axiomas no sea consecuencia de los grupos anteriores.

Para ello, Hilbert construyó geometrías artificiales, cuyos cimientos son números o funciones, de tal modo que a las relaciones geométricas definidas por los axiomas corresponden relaciones homólogas entre esos números o funciones. Para demostrar que los axiomas de un grupo son compatibles, basta demostrar que en la geometría artificial correspondiente no hay contradicción, lo que se comprueba por cuanto, si hubiera contradicción, ella aparecería en la aritmética del sistema de números o funciones así construida. Para demostrar la independencia de un axioma determinado respecto de los demás, basta construir también una geometría artificial, que admita éstos y niegue aquél. Si esta geometría es compatible queda demostrada la independencia del axioma en cuestión. Con este análisis Hilbert comprueba la validez de las geometrías no euclidianas, al demostrar la independencia del axioma de paralelismo, y de las geometrías no arquimedianas, de las cuales Veronese había dado un ejemplo en 189l, al comprobar la independencia del axioma de Arquímedes.

Claro es que las consideraciones de Hilbert desplazaron la cuestión de la compatibilidad e independencia de los axiomas de la geometría al problema semejante, aunque de raíz más profunda, de la compatibilidad de los axiomas de la aritmética que, como vimos, fue precisamente uno (el segundo) de los 23 problemas señalados por Hilbert en el Congreso de 1900.

Los *Grundlogen* terminan con un interesante "Epílogo" en el que Hilbert, después de insistir en la importancia de los problemas y recordar la "exigencia de pureza de los métodos demostrativos, elevada a principio por muchos de los matemáticos de nuestro tiempo", termina diciendo: “La investigación geométrica precedente pretende dilucidar en toda su generalidad qué axiomas, presupuestos o medios auxiliares son necesarios para establecer una verdad de geometría elemental, dejando a las circunstancias la elección de los métodos demostrativos adaptados al punto de vista que se haya adoptado".

La teoría de conjuntos

Los *Grundlagen* de Hilbert plantearon la cuestión de la compatibilidad de los axiomas de la aritmética, cuestión que se debatió en los primeros decenios de este siglo en la llamada "crisis" de los fundamentos de la matemática; crisis que surgió, a su vez, de una de las concepciones del siglo pasado que se convirtió en tema cardinal de la matemática del siglo XX: la teoría de conjuntos, cuyo creador, en el sentido actual, es el ya mencionado Cantor.

La idea de conjunto, que Cantor definió como “agrupamiento en un todo de objetos bien definidos, de nuestra intuición o de nuestro pensamiento", no era nueva en matemática, como no lo eran las anomalías y aparentes paradojas que proporcionaban los conjuntos infinitos. Ya Galileo, en sus célebres *Discorsi* de 1638, había traído a colación cuestiones matemáticas vinculadas con los conjuntos infinitos: al comparar la serie natural con la de sus cuadrados había comprobado la coordinabilidad de un conjunto con una de sus partes y en una comparación de sólidos, a la manera de Arquímedes en el *Método*, había llegado a la paradójica equivalencia entre un punto y una circunferencia. Por otra parte Bolzano, ya mencionado como precursor de la aritmetización del análisis, se había ocupado de las "paradojas del infinito", en un libro de este título que apareció póstumo en 1851, donde asomaban, en una atmósfera más filosófica que matemática, algunas de las nuevas concepciones, pero será Cantor quien dará vida estable y rigurosa a la "teoría de conjuntos". De origen ruso pero formado en Alemania, Cantor inicia su carrera científica con la mencionada exposición de los números irracionales de 1872, estudios que, en unión con investigaciones acerca de las series trigonométricas inspiradas en Riemann, lo condujeron a desarrollar la teoría de conjuntos una serie de memorias de 1874 a 1884. Esta teoría original, pero audaz y revolucionaria para la época, encontró oposición en especial entre matemáticos influyentes de Alemania; esta circunstancia, unida a las dificultades que presentaba la teoría y los nuevos problemas que planteaba,

llevó tal vez a su autor a una enfermedad nerviosa que lo mantuvo alejado de la ciencia durante unos años, volviendo a ocuparse de la teoría de conjuntos en el decenio 1887-1897.

Además del progreso técnico que significó, por la importancia de sus conceptos y aplicaciones a la teoría de conjuntos trajo a primer plano la cuestión del infinito en matemática. Esta cuestión venía de lejos; baste pensar que la distinción, aún vigente en matemática, entre infinito potencial e infinito actual procede de Aristóteles. En los tiempos medievales el infinito vuelve a asomar, ya sea con la introducción del cero como símbolo operatorio, ya sea en el tratamiento de series convergentes, pero es en los siglos del auge de los métodos infinitesimales cuando el infinito recobra actividad, aunque en forma siempre imprecisa, ya sea envuelto en las brumas "metafísicas" que rodeaban a los conceptos básicos del cálculo infinitesimal, ya sea amparado por el éxito de las aplicaciones de ese cálculo.

La aritmetización del análisis disipa aquellas brumas y elimina toda consideración acerca del infinito actual, para dejar incólume sólo el infinito potencial aunque sin advertirse entonces que expresiones tan inocentes como "los puntos de un segmento" o "la ecuación de una recta", ocultaban el infinito actual, que Cantor sacará a plena luz. A la frase de Gauss, para quien el infinito actual era "una manera de hablar", Cantor responde: "No obstante la diferencia esencial entre los conceptos de infinito potencial y de infinito actual (siendo el primero una magnitud finita variable que crece más allá de todo límite finito, y el segundo una magnitud fija, constante, que se mantiene más allá de todas las magnitudes finitas) ocurre con frecuencia tomar el uno por el otro… En vista de la justificada aversión a tales infinitos actuales ilegítimos y a la influencia de la tendencia moderna epicúreo-materialista, se ha extendido en amplios círculos científicos cierto *horror infiniti*, que encuentra su expresión clásica y su apoyo en la carta de Gauss; sin embargo me parece que el consiguiente rechazo, sin critica alguna, del legítimo infinito actual no deja de ser una violación de la naturaleza de las cosas, que han de tomarse como son".

La teoría cantoriana legitima este infinito actual, este infinito como ser, que está "en la naturaleza de las cosas" que hasta entonces había estado reprimido de modo que sólo pudiera

emerger a la conciencia matemática el infinito potencial, el infinito como devenir. Y así como el siglo XIX legisló sobre el infinito actual, Cantor con su teoría de conjuntos legislará, jerarquizara, y clasificará el infinito actual.

Hilbert contribuyó, con su gran autoridad, a difundir las ideas de Cantor, en especial en Alemania, y puede decirse que la teoría de conjuntos recibió consagración oficial en el Congreso de Zurich de 1897.

Esa teoría trajo aparejado el hallazgo de algunos "conjuntos paradójicos", que dieron base a una polémica acerca de los fundamentos de la matemática que se mantuvo durante los primeros decenios de este siglo y cuya reseña tiene ya cabida en una historia de la matemática.

Algunas de esas paradojas, que se deben al uso indebido del concepto "todos", venían de lejos. Recuérdese la del cretense mentiroso que puede sintetizarse en la expresión "yo miento", que implica contradicción pues si digo verdad miento y si miento digo verdad. Ese tipo de sofisma, con ropaje variado, está muy difundido; una versión, por ejemplo, se enuncia en el *Quijote*. (1)

En estas paradojas los conceptos lógicos o matemáticos están encubiertos por palabras. No ocurre lo mismo con las que dieron origen a la "crisis" de los fundamentos de la matemática: la de Cesare Burali Forti, que en 1897 observó que el conjunto bien ordenado formado por todos los números ordinales era contradictorio, así como resultaba contradictorio el "conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos" (paradoja de Russell de 1905).

Las cuestiones que suscitaron estas paradojas desataron la polémica, que culminó hacia 1930; en ella se perfilaron tres tendencias: logicista, formalista e intuicionista.

Con su concepción de la matemática como parte de la lógica o como formando una única y misma disciplina con la lógica, el logicismo encabezado por Russell vio la solución, para eliminar las paradojas, en un llamado "principio del círculo vicioso": Un elemento, cuya definición implica la totalidad de los elementas de un conjunto, no puede pertenecer a este conjunto, lo que llevó a desarrollar una “teoría de tipos”, que escalona las proposiciones en

una serie jerárquica, y a recurrir a un discutido "axioma de reducibilidad".

Cabe agregar que el logicismo o un aliado durante la polémica al ganar la adhesión del "Círculo de Viena", entonces vigorosa agrupación de científicos y filósofos que, en su primer Congreso (Praga, 1929), se interesó por la cuestión de los fundamentos de la matemática, escuchó a los voceros de las tres tendencias en pugna y se inclinó por la tendencia logicista. Pero debe advertirse que la doctrina del Círculo de Viena, el empirismo lógico o positivismo lógico, provenían, en lo referente a la lógica, principalmente de la obra de Ludwig Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus* de 1922 (existe versión española, Madrid, 1957) que, al vincular la lógica con la matemática, convertía a ambas en vastas tautologías.

La tendencia formalista, cuyo adalid fue Hilbert, constituyó la corriente tradicional y más afín a los matemáticos profesionales. Según ella la matemática no es sino un variado juego de signos y símbolos de carácter formal, sin contenido empírico alguno. Estas "formas vacías" obedecen a una serie de reglas de estructura y de deducción que, en último análisis, descansan en un sistema de axiomas. Un sistema formal así concebido depende única y exclusivamente de su validez lógica, de manera que el problema central del formalismo es el de la demostración de la no contradicción del grupo básico de axiomas de cada sistema formal. Tal es la tarea que se propusieron Hilbert y su escuela al crear una disciplina, la "metamatemática", que comprende una "teoría de la demostración", y que entendida de cierto modo como disciplina autónoma, ya ha producido resultados notables, como el ya clásico teorema de Kurt Gödel de 1931 según el cual no todo es demostrable en un sistema formal y, como consecuencia, el teorema no menos notable de Paul J. Cohen que en 1963 demuestra la independencia de la "hipótesis del continuo", uno de los problemas centrales de la teoría de conjuntos.

Muy distintos son los fundamentos de la tercera tendencia, la del intuicionismo, cuyo representante máximo fue Brouwer, que asigna al conocimiento matemático un carácter intuitivo inmediato y concibe la matemática como "una actividad constructiva del espíritu" o "el ingrediente exacto de nuestro pensamiento". Esta concepción, que a muchos científicos suena a mecánica y que sin

duda contiene buena dosis de psicología, trajo a primer plano la exigencia de la constructividad de las proposiciones sistemáticas, que obligó a una revisión de las proposiciones no constructivas y a la búsqueda de nuevos recursos de demostración, lo que no dejó de ser saludable. Asimismo, como recordamos, otra contribución del intuicionismo, consecuencia de su concepción de la lógica y de sus relaciones con la matemática, fue el advenimiento de lógicas no bivalentes.

Para terminar con la teoría de conjuntos, quizá convenga agregar que al convertir la noción de conjunto en una noción básica de la matemática, se hizo indispensable su introducción en la enseñanza general y se creó, en forma elemental, un "álgebra de conjuntos", en la que desempeñan eficaz papel didáctico los llamados "diagramas de Venn", que el lógico inglés John Venn propuso en 1880, modificando diagramas semejantes que en 1770 había utilizado Euler para representar los silogismos.

Nota complementaria

(1) La paradoja del *Quijote*. Aparece entre las cuestiones sometidas al juicio de Sancho Panza como gobernador de la ínsula de Barataria (Parte II, Cap. II). En resumen es la siguiente: El dueño de un río había impuesto como condición a quien quisiera pasar un puente que lo cruzaba, que debía "jurar primero a dónde y a qué va; y si jurase verdad, déjenle pasar, y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra", Ocurrió entonces que un hombre, que sin duda había leído a Russell, dijo que no iba a otra cosa que "a morir en aquella horca", con lo cual los encargados del cruce del puente quedaron desconcertados, pues si lo dejaban pasar libremente el hombre había mentido y debía morir en la horca, pero si era ahorcado había dicho verdad y se debía dejar pasar libremente. Lo que sigue ya no es cuestión de lógica, pero vale la pena terminar el cuento. Consultado el buen Sancho, que no entiende de sutilezas lógicas, propone al principio una imposible solución salomónica: "que de este hombre aquella parte que juró

verdad la dejen pasar y la que dijo mentira la ahorquen", mas luego, cediendo a razones no lógicas pero sí humanitarias, resuelve que lo dejen pasar libremente "pues siempre es alabado más el hacer bien, que mal".

Probabilidades y estadística

Después de Laplace el estudio teórico de las probabilidades no logró, durante el siglo pasado, mayores progresos, o por lo menos esos progresos fueron menores que los que realizará en este siglo; en cambio, encontró numerosas e importantes aplicaciones.

La aplicación a la teoría de los errores de observación dio nacimiento a la ley de distribución de los errores que lleva el nombre de Gauss, quien la hizo conocer en 1809, admitiendo, entre otras hipótesis, el postulado: el valor más probable de una magnitud, de la cual se conocen *n* medidas de igual precisión, es la media aritmética de dichas medidas. De esta cuestión y con resultados semejantes también se ocupó Laplace.

La aplicación de las probabilidades a la sociología y a la antropología, con el nacimiento de la estadística moderna, es obra del belga Adolphe Quételet, que en 1835 publica *Sur I'homme*… "donde introduce el concepto de "hombre medio". Su interés en la organización de la estadística, en el orden nacional e internacional, lo llevó a promover el primer congreso científico internacional de Estadística (Bruselas, 1853).

En la segunda mitad del siglo aparecen las aplicaciones a los fenómenos físicos y biológicos. En 1859 Maxwell, al aplicar el cálculo de probabilidades a la teoría cinética de los gases, da la ley de distribución de las velocidades moleculares y en 1877 Ludwig Boltzmann llega al resultado, sorprendente para su tiempo, de ser la entropía proporcional al logaritmo de la probabilidad del estado del gas. Ya en este siglo, Gibbs generaliza la cuestión con sus Principios elementales de mecánica estadística, desarrollada con especial referencia a los fundamentos racionales de la termodinámica, de 1902.

Mientras tanto el inglés Francis Galton, en sus investigaciones acerca de la herencia de 1887-1889, inaugura la aplicación de los métodos estadísticos a la biología. Sus estudios, en los que introduce el concepto de "correlación", fueron desarrollados más tarde por Karl Pearson, quien en 1901 funda la revista "Biometrika", órgano de esas investigaciones.

El siglo XX verá una renovación total del cálculo de probabilidades y de todos sus problemas, con la intervención de la teoría de conjuntos y el análisis general que convierten ese cálculo en una rama más de la matemática abstracta del siglo. El cálculo de probabilidades se axiomatiza, sus nociones se generalizan, se extienden sus aplicaciones y surgen nuevas teorías, como la "teoría de la decisión", que encaran los viejos problemas con nuevos métodos.

En conexión con el cálculo de probabilidades nace en el presente siglo una nueva disciplina, típica de la atmósfera científica de la época, con el tratado de 1947 que la bautiza: *Cibernética o control y comunicación en el animal y en la máquina,* del estadounidense Norbert Wiener. Imposible de encasillar en las habituales clasificaciones de las ciencias, en la cibernética se injertan, fuera de los temas implicados en el amplio contexto de su título, cuestiones de toda índole: teoría de la información y de la comunicación; deducción e inducción automáticas Y, en general, la automatización, la teoría de la decisión,…

Una consecuencia notable de esta conexión entre disciplinas distintas es la vinculación que se establece entre la información y la energía, demostrándose que, desde el punto de vista de su medida, la información no es sino entropía negativa, o que la información restablece la entropía perdida.

TABLA CRONOLÓGICA

1534	Fecha en la cual TARTAGLIA habría resuelto los tres casos, según él, de las ecuaciones cúbicas trinomias.
1537	TARTAGLIA. *Nova scientia inventa*, donde aparecen nociones de balística.
1542	*Narratio primo* de RHETICUS, donde aparecen dos capítulos sobre funciones circulares de la famosa obra de COPÉRNICO, que aparecerá el año siguiente: *Las revoluciones de la esfera celestes.* NUÑEZ describe el dispositivo llamado "nonius", que VERNIER modificará en 1631, de ahí también su nombre de "vernier".
1544	En su *Arithmetico Integra* STIFEL se ocupa de teoría de números y de álgebra, asomando la primera noción de los logaritmos.
1545	Aparece *Ars magna* de CARDANO, primer tratado de álgebra digno de este nombre, donde aparecen la solución de las cúbicas de TARTAGLIA y el método de solución de la cuártica de FERRARI.
1546	*Quesiti et inventioni diverse* de TARTAGLIA, con distintas cuestiones técnicas y matemáticas, así como notas autobiográficas relativas a su disputa con CARDANO.
1548	Desafío FERRARI-TARTAGLIA, espectacular pero sin mayor importancia científica.
1556	Aparece en el Nuevo Mundo (México) la primera obra matemática impresa.
1557	*The Whetstone of witte* de RECORDE, primer álgebra inglesa, donde aparece el signo =.
1564	NUÑEZ publica en castellano su *Álgebra*, mejorando la edición portuguesa de 1532.
1569	El cartógrafo MERCATOR aplica la proyección que hoy lleva su nombre, y que por su índole lo convierte en un precursor del cálculo infinitesimal.

1572	Álgebra de BOMBELLI, donde aparece la resolución aritmética del caso irreducible de las cúbicas.
1573	En su Aritmética, aparecida este año, aunque compuesta en 1557, MAUROLYCO expone en forma aún rudimentaria el "principio de inducción completa".
1576	Al morir, CARDANO deja entre sus escritos una obra sobre probabilidades que aparecerá en 1663.
1582	Reforma gregoriana del calendario: en ella intervino CLAVIUS.
1583	IL VIGNOLA, apodo de BAROZZI, *publica Las dos reglas de la perspectiva práctica*… para uso de los artistas.
1585	STEVIN, *Thiende* (en flamenco), folleto de aritmética decimal que introduce los números decimales, cuyo empleo aconseja así como propugna un sistema métrico decimal.
1591	En su Introducción al análisis VIÈTE introduce el uso de las letras en álgebra; se ocupó además de álgebra, de trigonometría y de cálculo infinitesimal.
1600	DEL MONTE, *Perspectiva libri sex*, primer tratado orgánico de perspectiva.
1610	En *Artis Analiticae Praxis*, HARRIOT introduce modificaciones en el simbolismo algebraico; se le deben los signos de desigualdad.
1612	BACHET de MEZlRIAC publica el primer tratado de matemática recreativa.
1613	CATALDI aplica las fracciones continuas en el cálculo aproximado de raíces cuadradas.
1614	NAPIER escribe sus “logaritmos”
1615	KEPLER, *Nova Xstereometria doliorum vinariorum* (comienzo del cálculo integral moderno)

1617	Tabla de logaritmos decimales de BRIGGS.
1619	NAPIER publica su tabla de logaritmos, construidos en 1614.
1620	Tabla de logaritmos de BURGI.
1629	GIRARD se ocupa de ecuaciones algebraicas y expone, sin demostración, el teorema fundamental del álgebra.
1632	Círculo calculador de OUGHTRED. Se le debe también la regla de cálculo, así como innovación en el simbolismo-
1634	MERSENNE se ocupa de teoría de números.
1635	CAVALIERI expone y aplica el método de los "indivisibles".
1636	Aparece el *Discurso del método* de DESCARTES, cuyo último apéndice: *la geometrie* trata también de álgebra y sienta las bases de la futura geometría analítica.
1637	Primeros trabajos de DESCARTES acerca de geometría descriptiva y proyectiva. Su *Brouillon Project* es de 1639.
1640	Primer escrito de PASCAL sobre cónicas.
1641	PASCAL inventa una maquina de calcular.
1642	TORRICELLI se ocupa de geometría en escritos, que aparecerán póstumos.
1647	SAINT VINCENT se ocupa de series.
1650	MENGOLI demuestra la divergencia de la serie armónica.
1654	PASCAL se ocupa del triángulo aritmético en un escrito póstumo. PASCAL y FERMAT estudian problemas originados en las mesas de juego, que darán lugar al cálculo de probabilidades.

1656	WALLIS, *arithmetica Infinitorum* (prolegómenos del cálculo infinitesimal)
1657	VAN SCHOOTEN se ocupa de la geometría cartesiana. Primer tratado de cálculo de probabilidades debido a HUYGENS.
1660	Investigaciones de FERMAT acerca de teoría de números, más se ocupará de cálculo infinitesimal.
1662	Se funda en Londres la sociedad Real, cuyo primer presidente: BROUNCKER se ocupo de cuestiones matemáticas.
1666	LEIBNIZ, *Ars combinatoria* (lógica).
1667	James GREGORY se ocupa de series.
1668	BARROW expone el método de las tangentes en sus *Lecciones geométricas*. N. MERCATOR en su *Logarithmotechnia* demuestra la relación entre el sector de hipérbola y los logaritmos.
1669	NEWTON compone *Analysis per aequationes numero terminorum infinitorum* que se publica en 1711.
1670	La publicación póstuma de las anotaciones de FERMAT en los márgenes de una edición de Diofanto, da lugar al llamado “Gran teorema de Fermat”.
1671	Tratado sobre las fluxiones de NEWTON.
1673	HUYGENS, *Horologium oscillatorium* (aplicación de las curvas cicloides a la regulación del péndulo).
1676	NEWTON se ocupa de la cuadratura de las curvas, trabajo que se publicará como uno de los *Apéndices de la Optica* de 1704.
1682	LEIBNIZ promueve la fundación de Acta Eruditorum.
1684	Primer escrito de LEIBNIZ sobre cálculo diferencial.

1686	Primer escrito de LEIBNIZ sobre cálculo integral.
1687	En su famosa Principia, NEWTON antepone nociones de cálculo infinitesimal.
1690	Teoría ondulatoria de la luz, de HUYGENS.
1691	Lecciones de cálculo diferencial de Joh. BERNOULLI.
1692	VIVIANI propone el problema que lleva su nombre.
1695	NEWTON se ocupa de la generación y clasificación de las cúbicas, en un trabajo que aparecerá como apéndice de la *Óptica*.
1696	L'HÔSPITAL, *Analyse des infiniment petits*, primer tratado de cálculo diferencial.
1669	Se hace patente la polémica latente entre NEWTON y LEIBNIZ, con motivo de la prioridad en la invención del cálculo infinitesimal.
1701	Los hermanos BERNOULLI se ocupan del problema de los isoperímetros.
1707	NEWTON, *Arithmetic universalis,* lecciones dictadas entre 1673 y 1683-
1712	En *Methodus differentialis* NEWTON se ocupa de diferencias finitas y de interpolaciones.
1713	Joh. BERNOULLI, *Ars conjectandi*, tratado de probabilidades con los números que llevan su nombre.
1714	TAYLOR expone la serie que lleva su nombre.
1720	MACLAURIN, *Geometría orgánica*, con la fórmula que lleva su nombre.

1730	DE MOIVRE expone, sin demostración, la expresión de las potencias de números complejos.
1731	CLAIRAUT se ocupa de las curvas de doble curvatura.
1733	SACCHIERI, *Euclides…vindicatus*, primer paso hacia las geometrías no euclidianas.
1734	BERKELEY, en The Analysis, critica los conceptos infinitesimales de la época.
1737	Se deben a FRÉZIER uno de los pocos tratados geométricos del siglo.
1738	EULLER, *Introducción a la aritmética*.
1742	GOLDBACH comunica a EULLER la conjetura que lleva su nombre.
1744	D'ALEMBERT se ocupa del problema de las cuerdas vibrantes. EULLER, *Methodis inveniendi* (cálculo de las variaciones).
1748	EULLER, *Introducción al análisis del infinito*.
1750	FAGNANO se ocupa de rectificaciones y CRAMER de curvas planas.
1751	Aparece la *Enciclopedia* dirigida por DIDEROT y D'ALEMBERT. A este último se debe el *Discurso preliminar*, con consideraciones generales acerca de la ciencia.
1755	EULER, Instituciones de cálculo diferencial.
1758	Aparece Historia de las matemáticas de MONTUCLA.
1760	BUFFON propone un problema que vincula las probabilidades con el número π.
1761	Muere BAYES dejando un escrito sobre las probabilidades de las causas.

1764	BEZOUT se ocupa de álgebra y de curvas planas.
1766	LAMBERT se ocupa de los fundamentos de la geometría
1768	EULLER, *instituciones de cálculo integral.*
1771	VANDERMONDE se ocupa de teoría de determinantes.
1776	WARING se ocupa de teoría de números.
1788	LAGRANGE, *Mecánica analítica*.
1790	ROLLE expone el teorema que lleva su nombre.
1794	MONGE, *Geometría descriptiva*. El año siguiente publica *Feuilles d'Analysis.*
1795	Aparece el *Cours de mathématiques* de LACROIX.
1796	Fecha más antigua que se menciona en la libreta de GAUSS, en la que anota, hasta 1814, sus descubrimientos.
1797	LAGRANGE expone su teoría de las "funciones analíticas". LEGENDRE se ocupa de teoría de números. MASCHERONI, *Geometría del compasso*. R*eflexiones sobre la metafísica del cálculo infinitesimal* de L. CARNOT.
1799	RUFFINI anuncia haber demostrado la imposibilidad de resolver la ecuación de quinto grado mediante radicales. En su tesis doctoral GAUSS expone una demostración del teorema fundamental del álgebra. LAPLACE, *mecánica celeste.*
1801	GAUSS, *Disquisiciones aritméticas*.
1802	BEZOUT se ocupa de álgebra.
1806	BRIANCHON enuncia el teorema que lleva su nombre.

1810	Aparece, hasta 1832, los *Annales* de GERGONNE, del nombre de su editor.
1811	Representación de complejos por puntos del plano de GAUSS.
1812	Serie hipergeométrica de GAUSS, con un primer modelo de una discusión de convergencia. LAPLACE, *Teoría analítica de las probabilidades.*
1813	Con la fundación de la "Analytical Society" por BABBAGE, HERSCHEL y PEACOCK, termina la polémica Newton-leibniz.
1819	HORNER expone el método numérico aproximado para resolver ecuaciones, ya conocido por los chinos.
1821	CAUCHY publica el *cours d'Analysis;* el año siguiente *Analysis Algebra*.
1822	En *Théorie analytique du chaleur* FOURIER hace conocer las series que llevan su nombre. PONCELET estudia las propiedades proyectivas de las figuras.
1824	ABEL, *Memoria sobre las ecuaciones algebraicas*. QUETELET edita *"Correspondance mathématique…"*
1826	"Funciones abelianas" de ABEL, CRELLE edita el "Journal" que lleva su nombre.
1827	GAUSS, Disquisiciones generales acerca de las superficies curvas. Cálculo baricentro de MÖBIUS.
1828	Tratado de geometría analítica de PLÜCKER.
1829	Por obra de ABEL y JACOBI aparecen las funciones elípticas. DIRICHLET, Teoría de funciones. Primer escrito, en ruso, de LABACHEVSKI sobre geometrías no euclidianas. (*La Pangéométrie* es de 1855)
1830	Algebra de PEACOCK.

1831	GAUSS comienza a redactar sus resultados acerca de las geometrías no euclidianas.
1832	GALOIS expone los fundamentos de la teoría que lleva su nombre. BOLYA se ocupa de las geometrías no euclidianas. Tratado de STEINER de geometría sintética. "Equipolencia" de BELLAVITIS (cálculo vectorial).
1833	La "*máquina analítica*" de BABBAGE.
1836	LIOUVILLE edita el "Journal de Mathématique".
1837	CHASLES se ocupa de geometría sintética. GRÄFFE expone su método de resolución aproximada de las ecuaciones algebraicas.
1845	Época del desarrollo de la "teoría de los invariantes" por CAYLEY y SYLVESTER, pareja a la que se agregará más tarde HERMITE.
1846	CAYLEY se ocupa de geometría proyectiva.
1847	"Números ideales" de KUMMER. STAUDT se ocupa de geometría de posición. BOLZANO estudia las "paradojas del infinito" (el tratado es de 1851).
1851	CHEBICHEV se ocupa de la distribución de los números primos.
1853	HAMILTON, Teoría de los cuarternios. LAGUERRE de carácter proyectivo a la medida del ángulo de dos rectas.
1854	Disertación inaugural de RIEMANN acerca de los fundamentos de la geometría (apareció impresa en 1867). BOOLE, *Las leyes del pensamiento.*
1858	CAYLEY desarrolla el cálculo de matrices.
1861	Primer ejemplo de función continúa sin derivadas de WEIERSTRASS que se hace conocer en 1874.
1862	Teoría de la extensión de GRASSMANN, ampliación de un trabajo de 1844.

1863	WEIERSTRASS expone el teorema final de la aritmética, “Trasformaciones” de CREMONA.
1864	Trabajos (que se publica en 1881) de B, PEIRCE sobre las álgebras lineales no asociativas. Teoría de funciones de RIEMANN.
1867	Principio de permanencia de HANKEL.
1868	BELTRAMI expone una interpretación “euclidiana” de las geometrías no euclidianas.
1870	JORDAN, Tratado de las sustituciones (teoría de grupos).
1872	KLEIN, Programa de Erlangen. LIE, Teoría de los grupos continuos de trasformaciones. WEIERSTRASS, CANTOR, MÉRAY y DEDEKIND (de las cortaduras) que enseñaba desde 1858 se publicó en1888. Aparece (póstumo) el Inventario de paradojas de DE MORGAN (en él aparece la expresión “inducción matemática”.
1873	HERMITE demuestra la trascendencia de *e*.
1874	Primeros escritos de G. CANTOR sobre teoría de conjuntos.
1878	CLIFFORD se ocupa de espacios *n*-dimensionales con dirección proyectiva. Intégrato de ABDANK-ABAKANOWICZ.
1879	Geometría numerativa de SCHUBERT.
1880	M, CANTOR inicia la publicación de sus Lecciones de historia de la matemática. Diagrama de VENN.
1881	POINCARÉ estudia las funciones automorfas.
1882	PASCH, Lecciones de geometría. Con la contribución de LINDEMANN quedo resuelto el problema de la cuadratura del círculo.
1887	Funciones de líneas de VOLTERRA.

1889	PEANO funda axiomáticamente la aritmética.
1890	KRONECKER se ocupa de ecuaciones algebraicas. SCHRÖDER, *Álgebra de la lógica*.
1891	Geometría no Arquimedianas de VERONESE.
1893	FREGE, *Fundamentos de la aritmética*.
1894	Integral de STIELTJES.
1897	BURALI-FORTI anuncia una de las primeras paradojas suscitadas por la teoría de conjuntos.
1898	BOREL, *teoría de funciones.*
1899	HILBERT, *Fundamentos de la geometría*. Nomografía de D'OCAGNE.
1900	Congreso de París, donde HILBERT enumera 20 problemas de la matemática entonces no resueltos. RICCI y LEVI-CIVITA introducen el cálculo diferencial absoluto (cálculo tensorial).
1902	Comienzan a aparecer los trabajos epistemológicos de POINCARÉ.
1903	Ecuación de FREDHOLM.
1905	Espacios abstractos de FRÉCHET.
1908	ZERMELLO axiomatiza la teoría de conjuntos.
1910	STEINTZ, Teoría algebraica de los cuerpos. RUSSELL y WHITEHEAD, *Principia Mathematica* (fundamentos del logicismo).
1915	Teoría geométrica de las ecuaciones de ENRIQUEZ.
1918	Integral de LEBESGUE.

1920	Teoría de la demostración (matemática) de HILBERT.
1922	Espacios de BANACH.
1925	BROUWER, *Sobre los fundamentos de la matemática intuicionista.*
1929	En el Congreso de Praga organizado por el "Círculo de Viena" se discute las distintas tendencias que protagonizan las llamadas "crisis de los fundamentos", entonces vigentes.
1930	VAN DER WAERDEN, Álgebra moderna.
1931	Teoría de GÖDEL. ARTI, Introducción a la geometría y álgebra analítica.
1935	Comienzan a aparecer los *Elementos de matemática* de BOURBAKI.
1944	*Teoría de juegos* de VON NEUMANN y MORGENSTERN.
1948	WIERNER, *Cibernética.*
1950	SCHWARTZ, *Teoría de las distribuciones.*
1963	COHEN demuestra la independencia de la "hipótesis del continuo".
1971	Se funda la "Comisión internacional de la historia de la matemática", que en 1974 inicia la publicación de "Historia Mathematica".